

Zadanie 1. Narysować w Excelu wykres gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanty rozkładów jednostajnego i trójkątnego:

$$(i) f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{jeżeli } x \in [a, b], \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (ii) f_2(x) = \begin{cases} \frac{w}{c-a}(x-a), & \text{jeżeli } x \in [a, c], \\ \frac{w}{b-c}(b-x), & \text{jeżeli } x \in [a, c], \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (1)$$

W przypadku rozkładu trójkątnego, $f_2(x)$, należy dodatkowo obliczyć parametr w tak, aby funkcja faktycznie przedstawiała gęstość rozkładu prawdopodobieństwa. Utworzyć przykładowe wykresy dla $a = 1$, $b = 4$, $c = 2$.

$$\text{Odp. (i)} \quad \mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^2 f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) dx - \mu_1^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Zadanie 2. Obliczyć wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe dla rozkładu jednostajnego i trójkątnego.

Zadanie 3. Rozkład t-Studenta ma gęstość wyrażającą się wzorem

$$f(t, v) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi v} \Gamma(\frac{v}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-(v+1)/2}, \quad (2)$$

gdzie parametr $v \in \mathbb{N}$ określa tzw. liczbę stopni swobody rozkładu.

- (i) Narysować wykres funkcji gamma $\Gamma(x)$ na przedziale $0, 1 \leq x \leq 5$.
- (ii) Narysować na jednym wykresie krzywe gęstości rozkładu t-Studenta na odcinku $[-4, 4]$ dla stopni swobody $v = 1, 2, 3, 8$ oraz rozkładu normalnego standardowego $N(0,1)$. W Excelu rozkład t-Studenta jest realizowany funkcją ROZKŁ.T.

Zadanie 4. Rozkład chi-kwadrat o k stopniach swobody jest rozkładem zmiennej losowej Y , która jest sumą kwadratów zmiennych losowych $X_1, \dots, X_k$ z których każda ma rozkład normalnym $N(0,1)$:

$$Y = (X_1)^2 + \dots + (X_k)^2. \quad (3)$$

Wtedy gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y wyraża się wzorem

$$f(x, k) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}. \quad (4)$$

Narysować wykresy gęstości prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty zmiennej chi-kwadrat na przedziale $[0, 8]$ dla stopni swobody $k = 2, 3, 4, 8, 12$. W przypadku gęstości utworzyć dwa wykresy: jeden, w którym obliczamy $f(x, k)$ wg wzoru (4), a drugi z wykorzystaniem funkcji Excelsa ROZKŁ.CHI.

Zadanie 5. (Obliczanie minimalnej liczebności populacji). Ile niezależnych doświadczeń należy wykonać, aby oszacować czas zakończenia reakcji chemicznej z maksymalnym błędem 20 s, gdy wiemy, że czas zakończenia reakcji jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma)$, dla

którego znamy odchylenie standardowe $\sigma = 45$ s? Obliczenia wykonać dla poziomów ufności 80%, 90%, 95%, 99%.

Wskazówki: Skorzystać z funkcji Excela ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR. Funkcja ta oblicza odwrotną do dystrybuanty rozkładu $N(0, 1)$. Poziom ufności jest równy $1 - \alpha$, gdzie α to tzw. poziom istotności. Zatem poziom ufności 80% oznacza, że $1 - \alpha = 0,9$ czyli $\alpha = 0,1$. Do obliczenia minimalnej liczności populacji stosujemy wzór $n = (z_\alpha \sigma / d)^2$, gdzie d jest żadaną dokładnością. Współczynnik z_α obliczamy z dystrybuanty rozkładu normalnego wg równania $F(z_\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\alpha$, skąd $z_\alpha = F^{-1}(1 - \frac{1}{2}\alpha)$, co w Excelu daje formuła

$$=ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR(1-\alpha/2)$$

Zadanie 6. (Obliczanie minimalnej liczebności populacji). Sytuacja jest podobna jak w Zadaniu 5, ale tym razem nie znamy odchylenia standardowego. Wiemy tylko, że mierzony czas zakończenia reakcji ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$. Wykonano osiem doświadczeń i uzyskano czasy: 520, 560, 545, 590, 550, 543, 572, 538 s. Ile pomiarów należy wykonać, aby móc oszacować czas zakończenia reakcji z błędem 25 s na poziomie ufności 0,95; 0,97; 0,99?

Wskazówki: $n = (t_\alpha s / d)^2$, gdzie $t_\alpha = F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ dla F to dystrybuanta rozkładu t-Studenta z $n_0 - 1$ liczbą stopni swobody, s to oszacowanie wariancji na podstawie próby (wariancja z próby S^2).

Zadanie 7. (Przedział ufności). Czas pracy urządzenia pewnego typu od danego dostawcy jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(\mu, 90 \text{ h})$, w którym nie znamy średniej. Z kupionej partii tych urządzeń, czasy pracy wynosiły (w godzinach):

3401, 3561, 3781, 3423, 3371, 3415, 388, 3561, 3762, 3711, 3881, 3520.

Oszacować średni czas pracy urządzenia na poziomie ufności 0,9; 0,95; 0,99.

Zadanie 8. (Przedział ufności). Czas pracy silnika odrzutowego do konieczności naprawy głównej jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma)$. Nie znamy odchylenia standardowego. Oszacować średni czas pracy silnika na podstawie danych czasów (w godzinach):

2240, 2300, 2521, 2413, 2563, 2875, 2852, 2981, 2986, 3001, 3023, 2854, 2569, 2763, 2783, 3023, 2371, 2856, 2716, 2981, 2098, 2971, 2501, 2891, 2249, 2933, 2331, 2701, 2442, 2770, 2391, 2551, 2448, 2761, 2655, 2711, 2371, 2601, 2980, 2477, 2710, 2644.

Zadanie 9. (Przedział ufności). Zmierzono wytrzymałość 10 losowo wybranych elementów walcowych i otrzymano wyniki (w Pa): 383, 284, 339, 340, 305, 386, 387, 335, 344, 346.

Przy założeniu, że wytrzymałość tych elementów jest zmienną losową $N(\mu, \sigma)$ o nieznanym σ , wyznaczyć na poziomie istotności 0,05 i 0,01 przedział ufności dla wartości oczekiwanej wytrzymałości elementów.

Zadanie 10. W losowo wybranej grupie 100 samochodów (ten sam model) przeprowadzono badanie zużycia paliwa (przy tej samej prędkości, np. 90 km/h) na 100 km. Średnie zużycie wyniosło ($\text{dm}^3/100 \text{ km}$): 8,2; 8,4; 8,1; 8,3; 7,9; 8,2; 7,8; 8,2; 7,8. Zakładając, że zmierzone wartości podlegają rozkładowi normalnemu $N(\mu, \sigma)$ o nieznannej wariancji podać przedział ufności dla średniego zużycia na poziomie ufności 0,97 i 0,99.