

Teoria prawdopodobieństwa (zwana też *rachunkiem prawdopodobieństwa*) bada zjawiska losowe, czyli takie, których wyników nie da się z góry przewidzieć, ale jednocześnie można je powtarzać wielokrotnie (w tych samych praktycznie warunkach). Centralnym pojęciem tej teorii jest prawdopodobieństwo, i choć istnieje kilka interpretacji prawdopodobieństwa, to matematyczna teoria prawdopodobieństwa formalizuje je ściśle poprzez odpowiedni zestaw aksjomatów. *Statystyka* natomiast zajmuje się metodami zbierania informacji liczbowych oraz ich analizą i interpretacją. Jako nauka, statystyka opiera się właśnie na matematycznej teorii prawdopodobieństwa, i dlatego do sprawnego posługiwania się jej metodami należy zapoznać się przynajmniej z podstawami teorii prawdopodobieństwa.

Zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego nazywamy *zbiorem zdarzeń elementarnych* i zazwyczaj oznaczamy symbolem Ω (duża litera omega alfabetu greckiego). Dowolny element $\omega \in \Omega$ jest zatem zdarzeniem elementarnym. W przypadku, gdy zbiór Ω jest skończony, tj. $|\Omega| < \infty$, to *zdarzeniem* nazywamy dowolny podzbiór zbioru Ω . W przypadku, gdy zbiór zdarzeń elementarnych Ω jest nieskończony, a zwłaszcza gdy jest nieprzeliczalny, na przykład $\Omega = \mathbb{R}$, to pojawiają się pewne subtelności matematyczne, gdybyśmy rozważali jako zdarzenia wszystkie możliwe podzbiory. Dlatego w tym przypadku należy mówić wszystkich „sensownych” podzbiorach (jest precyzyjna definicja – ale nie będzie to dla nas istotne).

Podsumujmy: $A \subseteq \Omega \Rightarrow A$ jest zdarzeniem, $\omega \in \Omega \Rightarrow \omega$ jest zdarzeniem elementarnym. Inaczej zdarzenia to podzbiory, a zdarzenia elementarne to elementy przestrzeni Ω .

Na przykład dla rzutu pojedynczą kostką do gry możemy przyjąć jako przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wtedy $\omega = 3$ jest przykładowym zdarzeniem elementarnym, ale $A = \{1, 3, 5\}$ jest przykładowym zdarzeniem, gdyż $A \subset \Omega$. Zauważmy też, że zdarzenie możemy opisać często odpowiednim precyzyjnym zdaniem. W tym przypadku $A =$ „wypadła nieparzysta liczba oczek”.

Aby móc oceniać szansę zajścia jakiegoś zdarzenia $A \subseteq \Omega$ musimy przyporządkować mu jakąś liczbę. Oczywiście postulaty, które takie liczby powinny spełniać to: (i) $0 \leq P(A) \leq 1$, (ii) $P(\Omega) = 1$ (zdarzenie pewne ma prawdopodobieństwo równe 1, (iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, gdy zdarzenia są rozłączne, tj. $A \cap B = \emptyset$.

Zadanie 1. Niech A, B będą dowolnymi zdarzeniami. Za pomocą A, B, A', B' i odpowiednich działań na zbiorach zapisz następujące zdarzenia:

- zaszło co najmniej jedno z tych zdarzeń,
- zaszły oba te zdarzenia,
- zaszło tylko zdarzenie A ,
- zaszło dokładnie jedno z tych zdarzeń, ale nie wiadomo które (tzn. zaszło tylko A lub zaszło tylko B),
- nie zaszło żadne z tych zdarzeń.

Zadanie 2. Rzucamy dwiema kostkami. Definiujemy dwa zdarzenia:

A = zdarzenie polegające na tym, że suma wyników jest ≤ 4 ,

B = przynajmniej na jednej kostce wystąpiła liczba parzysta.

- Zdefiniować przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω .
- Opisać zdarzenia $A \cap B$, A' , B' , $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
- Czym jest w ogóle dowolne zdarzenie w rozpatrywanym doświadczeniu?

Zadanie 3. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Jakie są prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

- suma oczek na obu kostkach jest mniejsza od 6,
- iloczyn oczek jest nieparzysty,
- uzyskano dokładnie jedną liczbę parzystą.

Zadanie 4. Przypomnijmy, że zdarzenia A i B nazywamy *zdarzeniami wykluczającymi się*, wtedy i tylko wtedy gdy $A \cap B = \emptyset$.

Niech A i B będą dowolnymi zdarzeniami takimi, że $P(A) = 3/4$ i $P(B) = 1/3$. Czy zdarzenia A i B mogą się wykluczać?

Zadanie 5. Zakład ubezpieczeń wypłaca 6 kategorii odszkodowań zdrowotnych. Prawdopodobieństwo, że pacjent otrzyma odszkodowanie pierwszej kategorii wynosi $1/3$, a pozostałe kategorie mają jednakowe szanse. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pacjent otrzyma wypłatę z kategorii 1, 3 lub 5.

Zadanie 6. Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania tzw. fula w grze poker?

Zadanie 7. Rzucamy trzy razy kostką. Jaka jest szansa, że za każdym razem uzyskamy inną liczbę oczek?

Zadanie 8. W grupie studenckiej jest 23 studentów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w tej grupie jest co najmniej jedna para studentów, którzy urodzili się tego samego dnia roku?

Zadanie 9. Rzucamy symetryczną monetą do chwili wyrzucenia orła. Jaka jest szansa, że liczba rzutów będzie parzysta?

Zadanie 10. W pudełku jest 10 losów ponumerowanych od 1 do 10. Na los z numerem 1 pada główna wygrana 10 zł, na losy z numerami 2 i 3 wygrana pocieszenia 1 zł, a za wyciągnięcie pozostałych płacimy 2 zł (tzn. wygrywamy 2 zł). Załóżmy, że wyciągnięcie każdego z losów jest jednakowo prawdopodobne. Doświadczenie polega na wyciągnięciu jednego losu.

- Określić rozkład prawdopodobieństwa dyskretnej zmiennej losowej X ,
- Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

- Obliczyć wartość oczekiwaną EX , wariancję D^2X oraz odchylenie standardowe DX .

Zadanie 11. Obliczyć dystrybuantę (narysować też wykres), wartość oczekiwaną, wariancję oraz standardowe odchylenie dla zmiennej losowej X , której rozkład prawdopodobieństwa jest w tabelce:

x_i	0	2	3	6	9
p_i	$1/3$	$1/4$	$1/6$	$1/5$	$1/4$

Zadania 12. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Podać rozkład zmiennej losowej, która jest wartością bezwzględną różnicy oczek na dwóch kostkach (kostki są rozróżnialne). Wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej i narysować jej wykres. Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję.

Zadanie 13. Rzucamy czterema monetami. Zmienną losową X definiujemy jako liczbę wyrzuconych orłów. Na przykład $X(\text{ORRO}) = 2$.

- (i) podać rozkład zmiennej losowej X ,
- (ii) narysować dystrybuantę zmiennej losowej X ,
- (iii) obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję oraz odchylenie standardowe zmiennej X .