

Zadanie 1. Niech X, Y będą dowolnymi zmiennymi losowymi na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω . Uzasadnić, że $D^2(X + Y) = D^2X + D^2Y$.

Niech $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$, gdzie $X_1, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi mającymi taki sam rozkład. W szczególności wynika stąd, że mają tę samą wartość oczekiwaną i wariancję: $E(X_i) = \mu$, $D^2(X_i) = \sigma^2$ dla $i = 1, \dots, n$. Z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a), \quad (1)$$

gdzie Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$.

Zadanie 2. Zmienne losowe X_i są niezależne i każda ma rozkład dwupunktowy $P(X_i = 0) = 1 - p$, $P(X_i = 1) = p$ gdzie $0 < p < 1$.

- (i) Jaki rozkład ma zmienna losowa $S_n = X_1 + \dots + X_n$?
- (ii) Pokazać, że z (1) wynika, że dla dowolnych $a < b$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (2)$$

Zadanie 3. Niech S_n będzie liczba sukcesów w n próbach Bernoullego. Uzasadnić na podstawie (2) następujący przybliżony sposób obliczania rozkładu:

$$P(i \leq S_n \leq j) \approx \Phi\left(\frac{j - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{i - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

dla dowolnych $i < j$, $i, j = 0, 1, \dots, n$.

Zadanie 4. Utworzyć arkusz kalkulacyjny w którym dla $n = 20$ będzie można zilustrować wynik z Zadania 3. Jako parametr przyjąć $0 < p < 1$. Posłużyć się funkcjami Excela ROZKŁ.DWUM i ROZKŁ.NORMALNY.S.

n	20
p	0,3

k	$P(S_n \leq k)$	CTG
0	0,000798	0,001707
1	0,007637	0,007349
2	0,035483	0,025481
3	0,107087	0,071617
4	0,237508	0,164557
5	0,416371	0,312793
6	0,608010	0,500000
7	0,772272	0,687207
8	0,886669	0,835443
9	0,952038	0,928383
10	0,982855	0,974519
11	0,994862	0,992651
12	0,998721	0,998293
13	0,999739	0,999682
14	0,999957	0,999953
15	0,999994	0,999994
16	0,999999	0,999999
17	1,000000	1,000000
18	1,000000	1,000000
19	1,000000	1,000000
20	1,000000	1,000000

Dystrybuanta rozkładu dwumianowego

— Dokładna — Przybliżona

Zadanie 5. (Weryfikacja hipotezy dotyczącej wariancji). W celu oszacowania dokładności pomiarów wykonanych urządzeniem dokonano ośmiu pomiarów i otrzymano następujące wyniki: 18,17; 18,21; 18,05; 18,14; 18,19; 18,22; 18,06; 18,08. Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ zweryfikować hipotezę

$$H : \sigma = 0,06$$

Należy użyć statystyki testowej $T = nS_n^2 / \sigma_0^2$, która ma rozkład χ^2 o $n-1$ stopniach swobody. Ponadto S_n^2 jest wariancją z próby, $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. Zbiory krytyczne:

gdzie χ_n^{-2} jest odwrotną do dystrybuanty rozkładu chi-kwadrat o n stopniach swobody.