

Problem interpolacji

Zacniemy od wyjaśnienia jak należy rozumieć problem interpolacji w matematyce. Załóżmy, że mamy dane $n+1$ punktów $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$ z przedziału $[a, b]$, które będziemy nazywać węzłami interpolacji. Ponadto dane są wartości pewnej nieznannej funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ w tych punktach

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n).$$

Zadanie interpolacji polega na znalezieniu funkcji $F(x)$, należącej do pewnej klasy (np. wielomiany stopnia nie większego niż n lub kombinacje liniowe funkcji harmonicznnych), której wartości w węzłach interpolacji $\{x_i\}$ są takie same jak funkcji $f(x)$. Tak więc warunek interpolacji jest następujący

$$F(x_i) = y_i = f(x_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

Tak określone zadanie interpolacji jest najprostszym z możliwych: jedynym warunkiem, który tutaj narzucamy jest, aby wartości funkcji się pokrywały w węzłach interpolacji. W innych zadaniach interpolacji oprócz warunku (1) dodajemy jeszcze inne, na przykład, aby wartości pochodnych funkcji F miały zadane wartości. Ale zawsze w interpolacji występuje równość wartości w węzłach interpolacji. Interpolację w oparciu tylko o warunki (1), gdy F należy do klasy wielomianów nazywamy *interpolacją w Lagrange'a*.

Często funkcję interpolującą możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej względem tak zwanych funkcji bazowych $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$F(x) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x), \quad (2)$$

gdzie współczynniki $a_0, \dots, a_n$ musimy wyznaczyć postępując się warunkami (1). Wybór funkcji bazowych występujących w sumie (2) zależy od klasy funkcji, do której należy funkcja interpolująca $F(x)$. Ale nawet przy ustalonej klasie możemy używać różnych funkcji bazowych, i jak się okazuje wybór ten może mieć istotne znaczenie dla stabilności numerycznej odpowiednich metod znajdowania współczynników interpolacji $a_0, \dots, a_n$. Aby wyznaczyć te współczynniki możemy skorzystać z (1) i (2), co prowadzi do układu liniowego na $a_0, \dots, a_n$

$$\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x_j) = y_j, \quad (3)$$

co w postaci rozwiniętej zapiszemy

$$\begin{cases} a_0 \varphi_0(x_0) + a_1 \varphi_1(x_0) + \dots + a_n \varphi_n(x_0) = y_0, \\ a_0 \varphi_0(x_1) + a_1 \varphi_1(x_1) + \dots + a_n \varphi_n(x_1) = y_1, \\ \vdots \\ a_0 \varphi_0(x_n) + a_1 \varphi_1(x_n) + \dots + a_n \varphi_n(x_n) = y_n. \end{cases} \quad (4)$$

Oczywiście, aby zagadnienie interpolacji miało jednoznaczne rozwiązanie, macierz $A = [\varphi_i(x_j)]$ układu (4) musi być nieosobliwa. Taki warunek można wyrazić poprzez wyznacznik macierzy

$$D = \det[\varphi_i(x_j)] = \det \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \neq 0. \quad (5)$$

Przykład. Wyznacz wielomian interpolacyjny dla $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ oraz $y_0 = -1, y_1 = 2, y_2 = 4$.

Rozwiązanie: Szukamy wielomianu drugiego stopnia

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Podstawiając węzły interpolacji otrzymujemy $F(x_i) = y_i$ dla $i = 0, 1, 2$, czyli

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = -1, \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 2, \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 4, \end{cases}$$

Z pierwszego równania mamy $a_0 = -1$, co po podstawieniu do pozostałych daje układ

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 3, \\ 2a_1 + 4a_2 = 5. \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu to $a_1 = 7/2, a_2 = -1/2$. Ostatecznie szukany wielomian interpolacyjny można wyrazić jako

$$F(x) = -1 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}x^2.$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Można łatwo pokazać, że interpolacja za pomocą wielomianów jest poprawnie określona. Dokładniej, jeżeli mamy danych $n+1$ węzłów interpolacji $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, to istnieje dokładnie jeden wielomian $F(x)$ stopnia co najwyżej n , który rozwiązuje zadanie interpolacji $F(x_i) = y_i$ dla $i = 0, 1, \dots, n$. Wielomian taki można zapisać w naturalnej bazie $\varphi_j(x) = x^j$ (bo $F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$). Wtedy warunek (5) ma postać

$$D = \det[\varphi_i(x_j)] = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

Wyznacznik D , który pojawił się w (6) jest tzw. wyznacznikiem Vandermonde'a, który można efektywnie wyrazić następującym wzorem

$$D = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \quad (7)$$

Ponieważ węzły interpolacji są różne: $x_j - x_i \neq 0$ dla $i \neq j$, więc widać że $D \neq 0$, a zatem układ równań (4) dla interpolacji wielomianami stopnia co najwyżej n posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Natomiast inną kwestią jest efektywna procedura numeryczna znajdowania tego wielomianu dla zadanych punktów $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Najbardziej naturalne wydawałoby się podejście, polegające na bezpośrednim rozwiązywaniu układu (4), który ma w tym przypadku postać

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_1 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1, \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_1 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases} \quad (8)$$

np. metodą Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego nie jest zalecane ze względu na złe uwarunkowanie macierzy tego układu. Dotyczy to zwłaszcza przypadku większych n .

Wzór interpolacyjny Lagrange'a uzyskujemy, gdy zamiast naturalnej bazy $1, x, x^2, \dots, x^n$ użyjemy innej bazy, oznaczanej $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n$, o następujących własnościach

- i) wielomian $\ell_i = \ell_i(x)$ jest stopnia n ,
- ii) $\ell_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq i, \\ 1, & \text{gdy } j = i. \end{cases}$

łatwo sprawdzić, że wielomian

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} = \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}, \quad (9)$$

spełnia powyższe kryteria i) oraz ii). Teraz możemy łatwo napisać wielomian interpolacyjny dla punktów $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, w następujący sposób

$$F(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \dots + y_n \ell_n(x). \quad (10)$$

Wzór (10) z wielomianami bazowymi określonymi w ℓ_i nazywamy *wzorem interpolacyjnym Lagrange'a*.

Przykład. Znaleźć wielomian interpolacyjny, który w punktach $-1, 1, 2, 5$ przyjmuje wartości $2, 3, 1, -5$.

Rozwiązanie: Wyznaczamy kolejne wielomiany bazowe $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3$ korzystając ze wzoru (9)

$$\begin{aligned}\ell_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(-1-1)(-1-2)(-1-5)} = -\frac{1}{36}(-10+17x-8x^2+x^3), \\ \ell_1(x) &= \frac{(x+1)(x-2)(x-5)}{(1+1)(1-2)(1-5)} = \frac{1}{8}(10+3x-6x^2+x^3), \\ \ell_2(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{(2+1)(2-1)(2-5)} = -\frac{1}{9}(2-x-2x^2+x^3), \\ \ell_3(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(5+1)(5-1)(5-2)} = -\frac{1}{72}(5-x-5x^2+x^3).\end{aligned}$$

Tak więc wielomian interpolacyjny może być zapisany jako

$$F(x) = 2\ell_0(x) + 3\ell_1(x) + \ell_2(x) - 5\ell_3(x).$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego Lagrange'a:

$$|f(x) - F(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|, \quad (11)$$

gdzie $M_{n+1} = \sup\{|f^{(n+1)}(x)| : x \in [x_0, x_{n+1}]\}$, $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n+1})$.

Zadanie 1. Oszacować błąd przy obliczaniu wartości $\ln(5,5)$ wielomianem interpolacyjnym ła podstawie znajomości wartości $\ln(3)$, $\ln(4)$, $\ln(5)$, $\ln(6)$.

Zadanie 2. Oszacować błąd przy obliczaniu wartości $\sin(1)$ wielomianem interpolacyjnym ła podstawie znajomości wartości funkcji sinus dla $x=0, \pi/4, \pi/2, \pi$.

Dobór węzłów interpolacji

Chcemy tak dobrać węzły $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$, aby wyrażenie

$$\sup\{|\omega_n(x)| : x \in [x_0, x_n]\} \quad (12)$$

było jak najmniejsze.

Dla przedziału $[-1, 1]$ rozwiązaniem są punkty, które są miejscami zerowymi tzw. wielomianów Czebyszewa T_n . Miejsca te są dane wzorami

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+1}\pi\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Przejście na dowolny odcinek dane jest przez transformację liniową $[-1, 1] \rightarrow [a, b]$, czyli

$$z = \frac{1}{b-a}(2x-a-b). \quad (14)$$

Można pokazać,

$$|f(x) - F(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \quad (15)$$

że oszacowanie błędu interpolacji dla węzłów Czebyszewa na odcinku $[a, b]$ dane jest wzorem.

Zadanie 3. Znaleźć wielomian interpolacyjny dla funkcji $f(x) = x \sin(x)e^x - e^{-x}$ na odcinku $[-1, 1]$ zakładając wielomian interpolacyjny 5 stopnia dla (i) węzłów równomiernie rozłożonych, (ii) dla węzłów Czebyszewa. Oszacować błąd w każdym z tych przypadków.

Aproksymacja średniokwadratowa (metoda najmniejszych kwadratów)

Założmy, że dane są $g_0, g_1, \dots, g_m$ – funkcje ciągłe na odcinku $[a, b]$ (liniowo niezależne), które będziemy nazywać *funkcjami bazowymi*. Na przykład mogą to być funkcje $1, x, x^2, \dots, x^m$. Ponadto złożmy, że mamy też dany zbiór punktów

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n).$$

Problem aproksymacji średniokwadratowej możemy sformułować tak: szukamy funkcji postaci

$$g(x) = \alpha_0 g_0(x) + \alpha_1 g_1(x) + \dots + \alpha_m g_m(x), \quad (1.16)$$

tak, aby wyrażenie

$$\sum_{i=0}^n (y_i - g(x_i))^2, \quad (1.17)$$

przyjmowało wartość najmniejszą. Tak więc nasze zadanie polega na znalezieniu współczynników

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m,$$

przy których wyrażenie (1.17) jest najmniejsze. Jeżeli podstawimy funkcję (1.16) do (1.17) to problem sprowadza się do minimalizacji następującej funkcji

$$E(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{i=0}^n (y_i - \alpha_0 g_0(x_i) - \alpha_1 g_1(x_i) - \dots - \alpha_m g_m(x_i))^2. \quad (1.18)$$

Warunkiem koniecznym na minimum funkcji E jest aby jej pochodne cząstkowe $\frac{\partial E}{\partial \alpha_k}$ były równe zero:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_k} = -2 \sum_{i=0}^n (y_i - \alpha_0 g_0(x_i) - \alpha_1 g_1(x_i) - \dots - \alpha_m g_m(x_i)) g_k(x_i) = 0,$$

dla $k = 0, 1, \dots, m$. Powyższy układ możemy przepisać następująco

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^n g_0(x_i) g_k(x_i) + \dots + \alpha_m \sum_{i=0}^n g_m(x_i) g_k(x_i) = \sum_{i=0}^n y_i g_k(x_i) \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (1.19)$$

a w bardziej przejrzystej postaci macierzowej tak

$$\begin{bmatrix} a_{00} & \dots & a_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \vdots \\ \rho_m \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

gdzie $a_{jk} = \sum_{i=0}^n g_j(x_i) g_k(x_i)$ oraz $\rho_k = \sum_{i=0}^n y_i g_k(x_i)$ dla $j, k = 0, 1, \dots, m$.

Tak więc zagadnienie aproksymacji średniokwadratowej zostało sprowadzone do rozwiązywania układu równań liniowych (1.20). Aby problem był poprawnie postawiony – tzn. aby układ miał zawsze jednoznaczne rozwiązanie – macierz występująca w nim po lewej stronie powinna być nieosobliwa. Okazuje się, że tak w istocie jest, gdy funkcje bazowe są niezależne oraz punkty $x_0, \dots, x_n$ parami różne. Zauważmy ponadto, że ze wzorów na $\{a_{jk}\}$ wynika, że macierz układu (1.20) *jest symetryczna*.

Przykład. Wyznacz funkcję liniową (wielomian stopnia ≤ 1) aproksymującą wartości $y_i : -1, 1.2, 2.5$ w punktach $x_i : 1, 2, 4$.

Rozwiązanie. Funkcje liniowe $g(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$ mają bazę $b_0(x) = 1, b_1(x) = x$. Wyznaczamy współczynniki układu równań (1.20) ($m = 1$, czyli układ będzie 2×2) wg wzorów podanych zaraz po tym układzie (pamiętajmy też o symetrii macierzy):

$$\begin{aligned} a_{00} &= \sum_{i=0}^2 g_0(x_i)g_0(x_i) = \sum_{i=0}^2 1 = 3, \\ a_{11} &= \sum_{i=0}^2 g_1(x_i)g_1(x_i) = \sum_{i=0}^2 x_i x_i = \sum_{i=0}^2 x_i^2 = 1 + 4 + 16 = 21, \\ a_{01} &= a_{10} = \sum_{i=0}^2 g_0(x_i)g_1(x_i) = \sum_{i=0}^2 1 \cdot x_i = 1 + 2 + 4 = 7. \end{aligned}$$

Zauważmy, że do obliczenia macierzy układu (1.20) nie wykorzystujemy w ogóle wartości $\{y_i\}$! Prawa strona układu:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \sum_{i=0}^2 y_i g_0(x_i) = \sum_{i=0}^2 y_i = -1 + 1.2 + 2.5 = 2.7, \\ \rho_1 &= \sum_{i=0}^2 y_i g_1(x_i) = \sum_{i=0}^2 y_i x_i = -1 \cdot 1 + 1.2 \cdot 2 + 2.5 \cdot 4 = 11.4. \end{aligned}$$

Zatem układ na α_0, α_1 jest następujący

$$\begin{bmatrix} 3 & 21 \\ 21 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7 \\ 11.4 \end{bmatrix},$$

czyli w tradycyjnym zapisie

$$\begin{cases} 3\alpha_0 + 21\alpha_1 = 2.7 \\ 21\alpha_0 + 7\alpha_1 = 11.4. \end{cases}$$

Rozwiązując go otrzymujemy $\alpha_0 = 220.5/140 = 1.575, \alpha_1 = 7.5/140 \approx 0.053571$. Ostatecznie funkcja liniowa aproksymując podane punkty ma postać

$$g(x) = 0.053571 \cdot x + 1.575.$$

Zadanie 4. Wyznacz wielomian aproksymujący stopnia ≤ 2 dla wartości $y_i : -3, -1, 1.7, 2.8, 3.5, 0.5$ w punktach $x_i : -2, -1.5, 2.3, 3.5, 4, 5.5$.

