

Wprowadzenie

Równania różniczkowe zwyczajne występują w zastosowaniach w chemii bardzo często. Jednym z takich obszarów są zagadnienia kinetyki chemicznej. Jeżeli znamy równanie kinetyczne lub mechanizm reakcji, to problem opisu zmiany stężenia reagentów w czasie sprowadza się do rozwiązywania (analitycznie lub numerycznie) równania lub układu równań różniczkowych. Gdy reakcje są jednorodne w przestrzeni (nie występują zjawiska transportu reagentów), to są to równania różniczkowe zwyczajne (występują tylko pochodne względem jednej zmiennej). Rozważmy jako przykład reakcję pierwszego rzędu



Oznacza to, że szybkość reakcji $v = k[A]$ jest proporcjonalna do aktualne stężenie substratu A. W tym opisie stężenie $[A]$ jest funkcja czasu. Czyli moglibyśmy napisać $[A](t)$. Czasami spotyka się zapis $[A]_t$, ale w ogólności piszemy po prostu $[A]$. Pochodna względem czasu będzie zatem $d[A]/dt$. Dla produktu będzie to $d[B]/dt$. Mamy więc dla substratu i produktu równania

$$\frac{d[B]}{dt} = k[A], \quad \frac{d[A]}{dt} = -k[A]. \quad (2)$$

W pierwszym równaniu (na produkt) po prawej stronie występuje $[A]$, więc wyrażmy $[A]$ przy pomocy $[B]$. Ze stechiometrii reakcji (1) widzimy, że $[A] + [B] = [A]_0 + [B]_0$, to są początkowe stężenia (liczba moli/objętość). Tak więc równanie na $[B]$ ma postać

$$\frac{d[B]}{dt} = k([A]_0 + [B]_0 - [B]). \quad (3)$$

Zauważmy, że równanie to ma postać

$$\frac{dy}{dt} = k(a - y), \quad (4)$$

gdzie a i k są danymi stałymi (w tym przypadku dodatkowo wiemy, że są one dodatnie). Takie równanie jest właśnie przykładem równania różniczkowego zwyczajnego na niewiadoma funkcję $y = y(t)$. W tym konkretnym przypadku jest liniowe równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu. Dalej zapoznamy się z wieloma przykładami takich równań i sposobami ich rozwiązywania.

DEFINICJA. Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$y' = f(t, y), \quad (5)$$

gdzie $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ jest daną funkcją. Rozwiązaniem równania (5) nazywamy każdą funkcję $\varphi: \mathbb{R} \supset (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna i spełniania równość

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{dla } t \in (a, b).$$

Rozwiązanie będziemy oznaczać także symbolem $y = y(t)$, więc możemy napisać po prostu

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad \text{dla } t \in (a, b).$$

Pochodną oznacza się także symbolem $\frac{dy}{dt}$, a równanie (5) zapiszemy wtedy następująco

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

W niektórych opracowaniach funkcja niewiadoma oznaczana jest jako $x = x(t)$, i wtedy równanie (5) jest zapisywane tak

$$x' = f(t, x) \quad (6)$$

lub

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Równania różniczkowe **zwyczajne** różnią się od równań różniczkowych **cząstkowych** tym, że funkcja niewiadoma jest funkcją jednej zmiennej (na ogół rzeczywistej – ale występują też równania o argumentie zespolonym). Na ogół zmienna ta jest oznaczamy symbolem t , co oczywiście sugeruje interpretację tej zmiennej jako czasu. Odpowiada to zastosowaniom, które będą nas głównie interesowały (np. kinetyka chemiczna). Oczywiście nie jest to jedyna możliwa interpretacja (argument jako czas), dlatego argument niewiadomej funkcji równania różniczkowego zwyczajnego oznacza się też po prostu symbolem x . Wtedy równanie (5) zapisane jest jako

$$y' = f(x, y) \quad \text{lub} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Przykład 1. Równanie, w którym prawa strona $f(t, y) = t + y$, czyli równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = t + y, \quad (7)$$

ma na przykład rozwiązanie $y(t) = e^t - t - 1$. Przekonujemy się o tym przez podstawienie:

$$\left. \begin{array}{l} y'(t) = (e^t - t - 1)' = e^t - 1 \\ f(t, y(t)) = t + y(t) = t + e^t - t - 1 = e^t - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y'(t) = f(t, y(t)).$$

Zatem $y'(t) = f(t, y(t))$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, czyli $y(t) = e^t - t - 1$ jest rozwiązaniem. Jest ono określone na całej osi rzeczywistej $\mathbb{R}$. Zobaczmy dalej, że nie zawsze tak musi być.

Zauważmy jednak, że $y(t) = e^t - t - 1$ nie jest jedynym rozwiązaniem. Na przykład funkcja $y_1(t) = -t - 1$, też spełnia równanie (7)

$$\left. \begin{array}{l} y_1'(t) = (-t - 1)' = -1, \\ \text{oraz} \\ t + y_1(t) = t + (-t - 1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1'(t) = t + y_1(t) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}.$$

Tak naprawdę mamy tu całą rodzinę funkcji, które są rozwiązaniami równania (7), gdyż każda funkcja postaci

$$y(t) = Ce^t - t - 1, \quad (8)$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą rzeczywistą, jest rozwiązaniem równania (7).

Przykład 2. Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = y^2. \quad (9)$$

Jak widać prawa strona tego równania, czyli $f(t, y) = y^2$ jest bardzo „gładką” funkcją (posiada pochodne względem y dowolnego rzędu) i jest określona dla wszystkich argumentów $(t, y) \in \mathbb{R}^2$. Przykładowym rozwiązaniem jest funkcja $y(t) = \frac{1}{1-t}$. Sprawdzamy to przez podstawienie:

$$y'(t) = \left(\frac{1}{1-t} \right)' = -\frac{1}{(1-t)^2} (-1) = \frac{1}{(1-t)^2},$$

$$(y(t))^2 = \left(\frac{1}{1-t} \right)^2 = \frac{1}{(1-t)^2},$$

czyli $y'(t) = y^2(t)$. Zauważmy jednak, że rozwiązanie jest określone tylko na odcinku $(-\infty, 1)$ (lub na odcinku $(1, \infty)$). W ogólnym przypadku rozwiązanie równania (9) ma postać

$$y(t) = \frac{1}{C-t},$$

i jest określone na odcinku $(-\infty, C)$ lub (C, ∞) .

Podane przykłady pokazują, że samo równanie różniczkowe zwyczajne (5) nie gwarantuje istnienia tylko jednej funkcji, która jest rozwiązaniem (*jednoznaczność*). Aby uzyskać jednoznaczność musimy wprowadzić jeszcze jakiś dodatkowy warunek na szukane rozwiązanie. Okazuje się, że dla równania postaci (5) takim warunkiem może być żądanie, aby rozwiązanie przyjmowało zadaną wartość w wybranym punkcie $t = t_0$. Prowadzi to do pojęcia *warunku początkowego* dla równania różniczkowego zwyczajnego (5).

DEFINICJA. Warunek postaci

$$y(t_0) = y_0, \quad (10)$$

gdzie $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ są zadanymi liczbami takimi, że $(t_0, y_0) \in U = \text{dom } f$ nazywamy *warunkiem początkowym* (lub *warunkiem Cauchy’ego*).

Zagadnienie początkowe (zagadnienie Cauchy’ego) zapisywane symbolicznie następująco

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (11)$$

oznacza, że szukana funkcja $y = y(t)$, ma spełniać równanie $y' = f(t, y)$ i warunek początkowy (10).

Przykład 3. Jakie jest rozwiązanie następującego zagadnienia Cauchy’ego

$$\begin{cases} y' = ty, \\ y(0) = 2. \end{cases} \quad (12)$$

Sprawdzamy przez podstawienie, że rozwiązaniem równania $y' = ty$ jest dowolna funkcja postaci $y(t) = Ce^{\frac{1}{2}t^2}$. Aby był spełniony warunek początkowy $y(0) = 2$ musi zachodzić $Ce^0 = 2$, czyli $C = 2$. Tak więc rozwiązaniem zagadnienia Cauchy’ego (12) jest funkcja $y(t) = 2e^{\frac{1}{2}t^2}$.

Oczywiście to, że funkcja $y(t) = 2e^{\frac{1}{2}t^2}$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego (12) nie oznacza jeszcze, że nie istnieją jakieś inne funkcje, które są rozwiązaniem tego problemu. Poniższy przykład ilustruje, że nawet zagadnienie Cauchy'ego (11) może mieć wiele rozwiązań (*niejednoznaczność*).

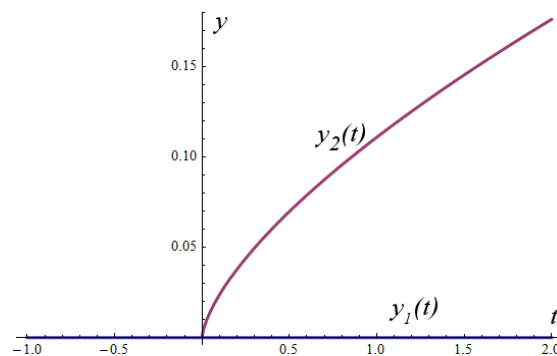
Przykład 4. Rozważmy następujący problem początkowy Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Funkcja stałe równa zero, $y_1(t) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, spełnia równanie oraz warunek początkowy. Ale także funkcja $y_2(t) = \frac{1}{27}t^3$ jest rozwiązaniem zagadnienia (13), gdyż

$$y_2'(t) = \frac{3}{27}t^2 = \frac{1}{9}t^2, \quad (y_2(t))^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{t^3}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}(t^3)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}t^2 \Rightarrow y_2'(t) = (y_2(t))^{\frac{2}{3}},$$

oraz $y_2(0) = \frac{1}{9} \cdot 0^{2/3} = 0$. Oczywiście funkcje $y_1(t) = 0$, $y_2(t) = \frac{1}{9}t^{\frac{2}{3}}$ są różne (i to w dowolnym otoczeniu punktu $t_0 = 0$), tak więc rozwiązanie problemu (13) nie jest jednoznaczne. Na rysunku poniżej pokazane są oba rozwiązania.



Jeżeli prawa strona równania (tj. funkcja $f = f(t, y)$) spełnia pewne dość ogólne założenia, to problem (11) ma rozwiązanie – i to dokładnie jedno. Mówi o tym następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE (Picarda–Lindelöfa). Załóżmy, że funkcja $f = f(t, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła oraz niech spełnia warunek Lipschitza względem zmiennej y :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \quad (14)$$

dla pewnej stałej $L > 0$. Wtedy zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie, określone w pewnym przedziale (a, b) zawierającym t_0 .

Uwaga. Podana wypowiedź twierdzenia jest nieco uproszczoną wersją bardziej szczegółowej wersji tego twierdzenia. Na ogół podaje się jeszcze w tezie twierdzenia zależność przedziału (a, b) od stałych charakteryzujących funkcję f , takich jak stała Lipschitza L oraz kresu modułu funkcji: $M = \sup\{|f(t, y)|: (t, y) \in Q\}$, gdzie

$$Q = \{(t, y) : |t - t_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\}.$$

Dalej zajmiemy się kilkoma metodami znajdowania „analitycznej” postaci rozwiązań zagadnienia Cauchy’ego.

Metoda rozdzielania zmiennych

Równanie różniczkowe postaci

$$y' = f(t)g(y) \quad (15)$$

nazywamy *równaniem o rozdzielonych zmiennych*. Okazuje się, że rozwiązywanie tego równania sprowadza się do obliczania odpowiednich całek. Symbolicznie możemy postępowanie prowadzące do rozwiązania zapisać tak

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y' = f(t)g(y), \\ \frac{dy}{g(y)} &= f(t)dt, \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(t)dt + C \quad \text{lub} \quad \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{t_0}^t f(t)dt. \end{aligned}$$

Obliczając zatem całki $\int \frac{dy}{g(y)}$, $\int f(t)dt$ uzyskujemy rozwiązanie $y = y(t)$ w postaci uwikłanej.

Czasami możemy je „rozwikłać” i uzyskać rozwiązanie w postaci jawnej (bezpośredniej).

Przykład 5. Rozwiązać równanie $y' = (\sin t)y^2$. Postępujemy jak niżej

$$\frac{dy}{dt} = (\sin t)y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = \sin t dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int \sin t dt,$$

co daje $-\frac{1}{y} = -\cos t + C$, więc ogólne rozwiązanie ma postać

$$y(t) = \frac{1}{\cos t + C},$$

gdzie C jest dowolną stałą. Gdybyśmy szukali rozwiązania zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} y' = (\sin t)y^2, \\ y(0) = 2, \end{cases} \quad (16)$$

to musimy jeszcze wyliczyć stałą C z warunku $y(0) = 2$,

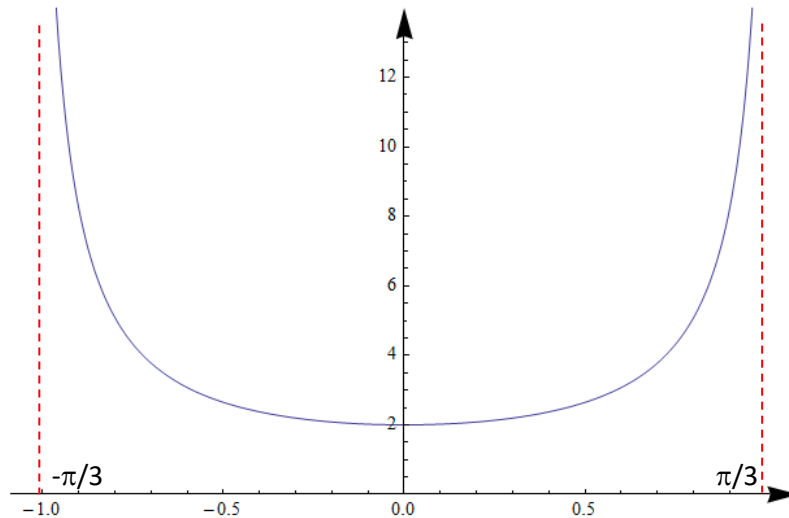
$$y(0) = \frac{1}{\cos 0 + C} = 2 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

Jedynym rozwiązaniem jest więc funkcja

$$y(t) = \frac{1}{\cos t - 1/2} = \frac{2}{2\cos t - 1}.$$

Zauważmy ponadto, że największym przedziałem, na którym jest określone to rozwiązanie jest przedział $(a, b) = (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Wybraliśmy ten przedział jako dziedzinę rozwiązania, gdyż musi on zawierać warunek początkowy $t_0 = 0$. Zatem *rozwiązaniem wysyconym* zagadnienia (16) jest funkcja

$$y: (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \ni t \mapsto \frac{2}{2\cos t - 1} \in \mathbb{R}.$$



Rys. 1. Rozwiązanie problemu początkowego (16). Jest ono określone na przedziale $(-\pi/3, \pi/3)$ i ma asymptoty pionowe na końcach tego przedziału. Rozwiązania nie da się przedłużyć poza ten przedział.

Przykład 6. Rozwiązać problem początkowy, określić maksymalny przedział, na którym istnieje rozwiązanie oraz narysować przebieg rozwiązania:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = e^{2x+y}, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Jest to równanie o rozdzielonych zmiennych, gdyż $e^{2x+y} = e^{2x}e^y$. Zatem

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = e^{2x+y} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{2x}e^y \Rightarrow e^{-y}dy = e^{2x}dx \Rightarrow \int e^{-y}dy = \int e^{2x}dx \Rightarrow \\ -e^{-y} &= \frac{1}{2}e^{2x} + C. \end{aligned} \quad (17)$$

Teraz wyznaczamy stałą C z warunku początkowego $y = -1$ dla $x = 0$:

$$-e^{-(-1)} = \frac{1}{2}e^{2 \cdot 0} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{2} - e.$$

Wstawiamy obliczoną stałą C do ogólnego rozwiązania (17) i staramy się wyrazić y przy pomocy x :

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} - e, \quad e^{-y} = \frac{1}{2} + e - \frac{1}{2}e^{2x}, \quad -y = \ln\left(\frac{1}{2} + e - \frac{1}{2}e^{2x}\right),$$

czyli mamy rozwiązanie

$$y(x) = -\ln\left(\frac{1}{2} + e - e^{-2x}\right).$$

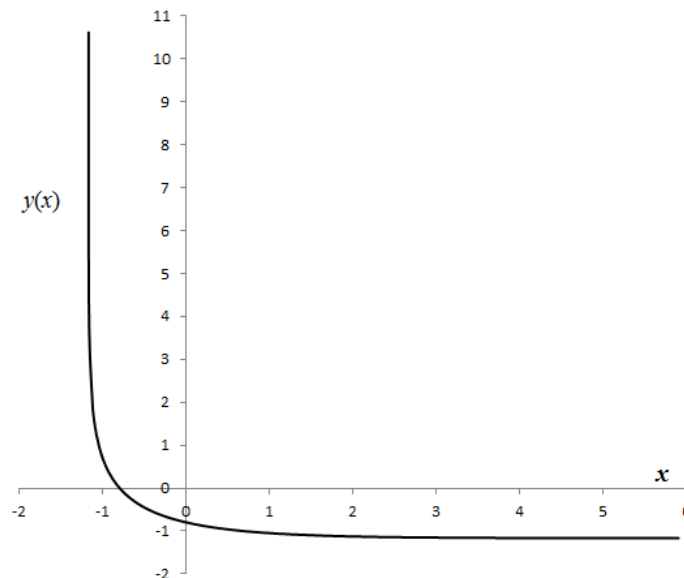
Jest ono określone dla x takich, że $\frac{1}{2} + e - e^{-2x} > 0$, czyli $-\ln(\frac{1}{2} + e) < 2x$. Zatem rozwiązanie wysycone

$$y(x) = -\ln\left(\frac{1}{2} + e - e^{-2x}\right), \quad x \in (-\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2} + e), \infty).$$

Ponieważ $-\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2} + e) \approx -0,584$ więc mamy w przybliżeniu $y(x) = -\ln(\frac{1}{2} + e - e^{-2x})$, $x \in (-0,584, \infty)$.

Funkcja powyższa ma następujące granice na końcach przedziału określoności

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2} + e)} y(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2} + e)} \left[-\ln\left(\frac{1}{2} + e - e^{-2x}\right) \right] = -\ln(0^+) = -(-\infty) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\ln\left(\frac{1}{2} + e - e^{-x}\right) \right] = -\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{2} + e - 0\right) = -\ln\left(\frac{1}{2} + e\right) \approx -1,168 \end{aligned}$$



Rys. 2. Wykres rozwiązania zagadnienia początkowego z **Przykładu 6**. Rozwiązanie nie jest określone dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Posiada asymptotę pionową w $x = -\ln(0,5+e) \approx -1,168$ oraz poziomą dla $x \rightarrow \infty$, $y(x) \rightarrow -\ln(0,5+e) \approx -1,168$.

Przykład 7. Rozwiązać problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' = \frac{x+2}{y+1}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

(Zauważmy, że tym razem zmienną niezależną oznaczono symbolem x zamiast t .)

Rozwiązanie:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{y+1} \Rightarrow (y+1)dy = (x+2)dx, \quad \int (y+1)dy = \int (x+2)dx,$$

zatem $\frac{1}{2}y^2 + y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$. Wartość stałej całkowania C obliczymy z warunku początkowego $y(0) = 2$. Daje on: $\frac{1}{2}2^2 + 2 = \frac{1}{2}0^2 + 2 \cdot 0 + C$, czyli $C = 4$. W ten sposób uzyskujemy rozwiązanie $y = y(x)$ w postaci uwikłanej:

$$\frac{1}{2}y^2 + y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4.$$

W tym konkretnym przypadku nie ma problemu z rozwiązaniem („rozwikłaniem”) tej zależności względem y , gdyż jest to proste równanie kwadratowe na $y(x)$:

$$y^2 + 2y - x^2 - 4x - 8 = 0,$$
$$\Delta = 4 - 4(-x^2 - 4x - 8) = 4x^2 + 16x + 36, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{x^2 + 4x + 9},$$

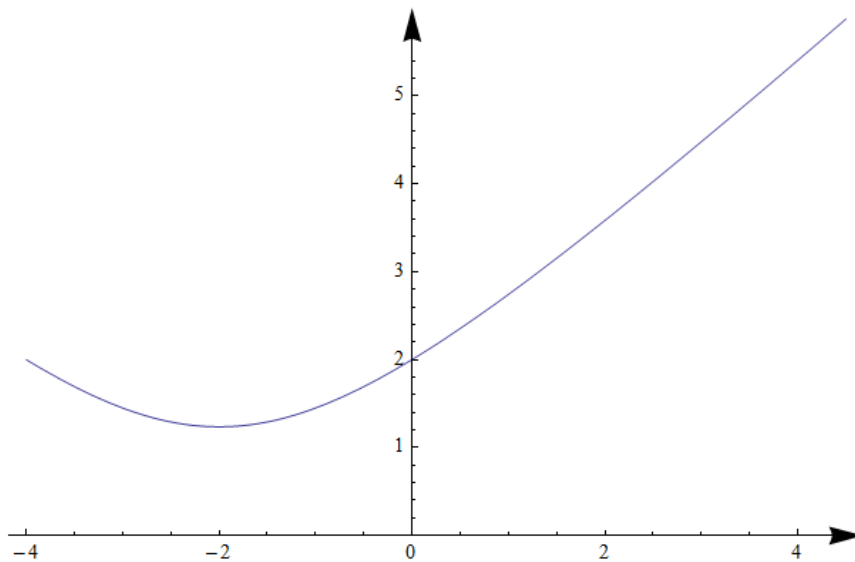
skąd

$$y_1(x) = \frac{-2 + 2\sqrt{x^2 + 4x + 9}}{2} = -1 + \sqrt{x^2 + 4x + 9},$$
$$y_2(x) = \frac{-2 - 2\sqrt{x^2 + 4x + 9}}{2} = -1 - \sqrt{x^2 + 4x + 9}.$$

Z tych dwóch funkcji tylko pierwsza spełnia warunek początkowy $y(0) = 2$. Tak więc rozwiązaniem problemu jest

$$y(x) = -1 + \sqrt{x^2 + 4x + 9}.$$

Zauważmy też, że dziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$, gdyż wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Poniżej pokazany jest fragment wykresu rozwiązania.



Rys. 3. Wykres rozwiązania równania zagadnienie Cauchy’ego z Przykładu 7 ograniczony do przedziału $[-4, 4]$. Jak widać dla $x \rightarrow \pm\infty$ rozwiązanie ma asymptoty ukośne.

Przykład 8. Rozwiązać następujący problem różniczkowy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} \sqrt{1+y^2}, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) = -\infty. \end{cases} \quad (18)$$

W tym przypadku zastosowaliśmy na oznaczenie zmiennej niezależnej symbolu x zamiast t . Tak więc szukana funkcja zależy od x , tj. $y = y(x)$. Problem (18) nie jest to typowym problem początkowym, gdyż dodatkowy warunek został sformułowany w postaci żądania, aby granica rozwiązania w $x=1$ wynosiła $-\infty$. Mimo, że ściśle rzecz biorąc nie jest to problem Cauchy'ego, to zapis jednoznacznie określa jakie warunki ma spełniać rozwiązanie i można szukać rozwiązania.

Stosując rozdzielanie zmiennych mamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \sqrt{1+y^2} \Rightarrow \frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{dx}{x} + \text{const.}$$

Ponieważ $\int \frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}} = \ln\left(\frac{1}{y} + \sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\right) + \text{const}$, zatem $\ln\left(\frac{1}{y} + \sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\right) = \ln x + \text{const}$, skąd

$$\frac{1}{y} + \sqrt{1+\frac{1}{y^2}} = Cx,$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą.

Z warunku $y(1^+) = -\infty$ znajdujemy stałą całkowania: dla $x \rightarrow 1$ mamy:

$$\begin{array}{c} \frac{1}{y} + \sqrt{1+\frac{1}{y^2}} = Cx \Rightarrow 0+1 = C \cdot 1, \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ 0 \quad \quad \quad 1+0 \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

więc $C=1$, co daje rozwiązanie

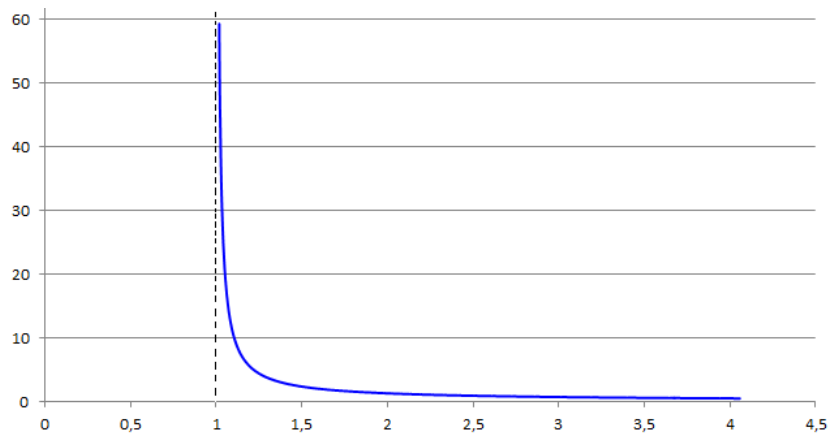
$$\frac{1}{y} + \sqrt{1+\frac{1}{y^2}} = x.$$

w postaci uwikłanej. W tym można rozwiązać względem y

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} + \sqrt{1+\frac{1}{y^2}} = x &\Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{y^2}} = x - \frac{1}{y} \Rightarrow \left(\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{y}\right)^2 \\ \Rightarrow 1 + \frac{1}{y^2} &= x^2 - 2x\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} \Rightarrow 1 = x^2 - 2x/y, \end{aligned}$$

i ostatecznie otrzymamy

$$y(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \quad \text{dla } x > 1. \quad (19)$$



Rys. 4. Wykres rozwiązania problemu z Przykładu 8.

Równania liniowe skalarne

DEFINICJA. Równanie postaci

$$y' + p(t)y = q(t), \quad (20)$$

gdzie $p(t)$ i $q(t)$ są danymi funkcjami dla $t \in (a, b)$, nazywa się *równaniem liniowym*. Jeżeli $q(t) \equiv 0$, wtedy jest to *równanie liniowe jednorodne*.

Jednym ze sposobów rozwiązywania równania (20) jest *metoda uzmienniania stałej*. Zaczynamy od rozwiązywania równania jednorodnego ($q(t) = 0$), a następnie szukamy jakiegokolwiek („szczególnego”) rozwiązania równania niejednorodnego (tzn. z wyrazem $q(t)$). Z teorii wynika, że ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego (20) (**ORRN**) jest sumą ogólnego rozwiązania równania jednorodnego (**ORRJ**) i szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego (**SRRN**):

$$y_{ORRN} = y_{ORRJ} + y_{SRRN}. \quad (21)$$

Szukanie ogólnego rozwiązania równania jednorodnego jest prosto – takie równanie jest równaniem o rozdzielonych zmiennych. Jeżeli w (20) przyjmujemy $q(t) = 0$, to

$$y' = -p(t)y$$

czyli

$$\frac{dy}{dt} = -p(t)y, \quad \frac{dy}{y} = -p(t)dt,$$

skąd $\int \frac{dy}{y} = -\int p(t)dt$, $\ln y = -\int p(t)dt + \text{const}$, więc

$$y(t) = Ce^{-\int p(s)ds}. \quad (22)$$

Teraz traktujemy stałą C tak, jakby to była funkcja i poszukujemy dowolnego rozwiązania równania niejednorodnego w postaci

$$y(t) = C(t)e^{-\int p(s)ds} \quad (23)$$

W tym celu podstawiamy funkcję (23) do (20), co prowadzi do elementarnego równania na $C(t)$. Metod pokazana jest w poniższym przykładzie.

Przykład 9. Znaleźć rozwiązanie ogólne liniowego równania różniczkowego

$$y' + ty = e^{-\frac{t^2}{2}} \sin t. \quad (24)$$

Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne $y' = -ty$, skąd

$$y(t) = Ce^{-\int t dt} = Ce^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (25)$$

Teraz szukamy rozwiązania szczególnego w postaci $y_s = C(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$. Podstawiam to wyrażenie do (24):

$$\begin{aligned} y'_s + ty_s &= C'e^{-t^2/2} + C \cdot (-t)e^{-t^2/2} + tCe^{-t^2/2} = e^{-t^2/2} \sin t, \\ C'e^{-t^2/2} &= e^{-t^2/2} \sin t, \\ C' &= \sin t. \end{aligned}$$

Z ostatniego równania mamy oczywiście $C(t) = -\cos t$, co po podstawieniu do $y_s = C(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ daje $y_s(t) = -e^{-t^2/2} \cos t$. Zgodnie z teorią ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego jest sumą ogólnego rozwiązania równania jednorodnego i jakiegoś dowolnego (zwanego też szczególnym) rozwiązania równania niejednorodnego, zatem

$$y(t) = Ce^{-t^2/2} - e^{-t^2/2} \cos t. \quad (26)$$

Jeżeli równanie (24) uzupełnić o warunek początkowy, na przykład $y(0) = 3$, to rozwiązanie takiego problemu Cauchy'ego otrzymamy wyliczając stałą C ze wzoru (26) wstawiając warunek początkowy:

$$y(0) = Ce^{-0} - e^{-0} \cos 0 = C - 1 = 3 \Rightarrow C = 4.$$

Tak więc problem początkowy

$$\begin{cases} y' + ty = e^{-\frac{t^2}{2}} \sin t, \\ y(0) = 3, \end{cases}$$

ma rozwiązanie $y(t) = 4e^{-t^2/2} - e^{-t^2/2} \cos t = e^{-t^2/2} (4 - \cos t)$.

RÓWNANIE BERNOULLIEGO

Istnieją pewne szczególne typy równań, które co prawda nie są liniowe, ale można je do takiej postaci sprowadzić. Jako jeden z przykładów rozważmy równanie nieliniowe postaci

$$y' + p(t)y + q(t)y^n = 0. \quad (27)$$

Równanie to nazywa się *równaniem Bernoulliego*, a liczbę n nazywamy *wykładnikiem Bernoulliego*. Dla $n=0$ lub $n=1$ równanie (27) jest równaniem liniowym. Dlatego interesować nas będzie przypadek, gdy $n \notin \{0, 1\}$. Stosujemy następujące podstawienie

$$z = y^{1-n}, \quad (28)$$

tn. chcemy uzyskać równanie na funkcję $z(t) = [y(t)]^{1-n}$. Mamy $z' = (1-n)y^{-n}y'$, więc mnożąc równanie (27) przez y^{-n} otrzymujemy

$$\begin{aligned}y^{-n}y' + p(t)y^{1-n} + q(t) &= 0, \\ \frac{1}{1-n}z' + p(t)z + q(t) &= 0,\end{aligned}$$

czyli równanie liniowe

$$z' + (1-n)p(t)z + (1-n)q(t) = 0, \quad (29)$$

na funkcję $z = z(t)$.

Przykład 10. Rozwiązać równanie

$$y' = ty + y^2. \quad (30)$$

Jest to przykład równania Bernoulliego z wykładnikiem $n = 2$. Stosujemy zatem podstawienie

$$z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}.$$

Mamy

$$y' = -\frac{z'}{z^2},$$

więc po wstawieniu do (29) otrzymujemy

$$-\frac{z'}{z^2} = t\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2},$$

co daje równanie liniowe $z' = -tz - 1$.

Przykład 11. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y' + \frac{1}{t}y - \frac{\ln t}{t}y^2 = 0. \quad (31)$$

Stosujemy podstawienie (28) dla $n = 2$, czyli $z = y^{-1}$, co daje liniowe równanie

$$z' - \frac{1}{t}z + \frac{\ln t}{t} = 0.$$

Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne $z' - \frac{1}{t}z = 0$, czyli $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dt}{t}$, więc $\ln z = \ln t + \text{const}$, skąd $z(t) = Ct$. Następnie stosujemy uzmiennianie stałej, $z(t) = C(t)t$. Wstawiamy do równania niejednorodnego

$$C't + C - \frac{1}{t}Ct + \frac{\ln t}{t} = 0 \Rightarrow C't + \frac{\ln t}{t} = 0.$$

Całkujemy $C' = -\frac{\ln t}{t^2}$:

$$\begin{aligned} C(t) &= -\int \frac{\ln t}{t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t}\right)' \ln t dt = \frac{\ln t}{t} - \int \frac{1}{t} (\ln t)' dt = \frac{\ln t}{t} - \int \frac{1}{t^2} dt = \\ &= \frac{\ln t}{t} - \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{\ln t}{t} + \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

To daje rozwiązanie szczególne $z_s(t) = C(t)t = \left(\frac{\ln t}{t} + \frac{1}{t}\right)t = 1 + \ln t$. Tak więc rozwiązanie ogólne równania na $z = z(t)$ jest następujące

$$z(t) = Ct + \ln t + 1.$$

Wracając do funkcji y , poprzez $z = y^{-1}$, otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (31) jako

$$y(t) = \frac{1}{Ct + \ln t + 1}.$$

Zadania

Zadanie 1) Sprawdzić, że podane obok równań różniczkowych funkcje są rozwiązaniami.

a) $\frac{dy}{dx} = 3y + 2$, $y(x) = e^{3x} - \frac{2}{3}$.

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{x} - 3x^2$, $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{C}{x^3}$.

c) $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$, $y(x) = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x$.

d) $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$, $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Zadanie 2) Sprawdź, że podane funkcje spełniają równanie różniczkowe, a następnie wyznacz stałą $C \in \mathbb{R}$ z warunku początkowego.

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $y(2) = 24$,
 $y(x) = Cx^2$.

b) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 2xe^x - 1, \\ y(0) = 4, \end{cases}$
 $y(x) = x^2 e^x + 1$.

Zadanie 3) Rozwiąż zagadnienia początkowe:

a) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4xy^2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = e^{x+y}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

c)* $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3xy + 2, \\ y(0) = -1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = (y-1)y, \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Wsk. W punkcie b) $y(x) = -\ln(2 - e^x) = \ln \frac{1}{2 - e^x}$. Rozwiązanie jest określone dla $x \in (-\infty, \ln 2)$.

Natomiast w punkcie c) rozwiązanie wyraża się poprzez tzw. *funkcję błędu*, erf.

Zadanie 4) Rozwiąż równania

a) $y' + y + y^3 = 0$, $y(0) = -1$

b) $y' + 2y + (\sin t)\sqrt{y} = 0$, $y(0) = 1$.

Odp. a) $y(t) = -\frac{1}{\sqrt{2e^{2t} - 1}}$.

b) $y(t) = \frac{1}{16}(\cos t - \sin t - 5e^{-t})^2$.