

Uwaga: Proszę pamiętać, że na zajęciach obowiązuje także znajomość omówionych w materiałach przykładów!!! Zadania z gwiazdką nie są obowiązkowe.

CAŁKOWANIE FUNKCJI WYMIERNYCH

DEFINICJA. Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami.

Interesować nas będą tylko funkcje wymierne rzeczywiste, tak więc $x \in \mathbb{R}$ oraz współczynniki wielomianów $P(x)$ i $Q(x)$ są rzeczywiste. Oczywiście funkcja wymierna określona jest dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha \in \mathbb{R} : Q(\alpha) = 0\}$ (tzn. dla wszystkich x z wyjątkiem miejsc zerowych wielomianu $Q(x)$).

Przykłady funkcji wymiernych to

$$\frac{x}{x+1}, \frac{2}{x^3-1}, \frac{1}{x}, \frac{5x^2-3x+6}{x^3+x-2}, \frac{-2x^5+3x+1}{x^2+1}, \frac{3x^2+1}{(x-1)^2(x-3)(x^2+4)^3}, 4x^5+x-1.$$

Zauważmy, że wielomian jest szczególnym przypadkiem funkcji wymiernej (wtedy $Q(x) \equiv 1$, czyli w liczniku jest wielomian stopnia zerowego).

Obliczenie całki $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ z funkcji wymiernej jest „w zasadzie możliwe”, ale **pod warunkiem że potrafimy wyznaczyć pierwiastki (miejsc zerowe) wielomianu $Q(x)$** . Całka ta wyraża się poprzez funkcje elementarne oraz pierwiastki równania $Q(x) = 0$.

Aby obliczyć całkę funkcji wymiernej, rozkładamy ją na sumę tzw. *ułamków prostych*, które można już całkować w sposób elementarny.

DEFINICJA. Ułamki proste są to funkcje wymierne o następującej szczególnej postaci

$$\frac{A}{(x-\alpha)^m}, \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n} \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4c < 0 \text{ oraz } n, m \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Proszę zwrócić uwagę, że zgodnie z założeniem $\Delta < 0$, funkcja kwadratowa w mianowniku drugiego ułamka prostego, $x^2 + bx + c$, nie posiada pierwiastków (rzeczywistych), a zatem wyrażenie $x^2 + bx + c$ nie rozkłada się na czynniki liniowe postaci $x - x_i$.

Pierwszy typ ułamków prostych całkuje się bardzo prosto:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^m} dx = \begin{cases} \frac{A}{-m+1} (x-\alpha)^{-m+1} + C, & \text{dla } m > 1, \\ \ln |x-\alpha| + C, & \text{dla } m = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Na przykład:

$$\int \frac{5}{(x-2)^4} dx = \frac{5}{-4+1} (x-2)^{-4+1} + C = -\frac{5}{3(x-3)^3} + C, \quad \int \frac{2}{x-7} dx = 2 \ln |x-7| + C.$$

Całkowanie ułamków prostych drugiego typu jest bardziej złożone. Po pierwsze warunek $\Delta < 0$ oznacza, że trójmian kwadratowy $x^2 + bx + c$ nie ma miejsc zerowych rzeczywistych, to znaczy **nie może** być rozłożony na czynniki proste: $(x - x_1)(x - x_2)$ w dziedzinie rzeczywistej. Aby uprościć rachunki związane z obliczaniem całki $\int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^n} dx$, zapisujemy wielomian występujący w mianowniku następująco

$$x^2 + bx + c = x^2 + 2x \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4c}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4}, \quad (3)$$

gdzie składnik $\frac{-\Delta}{4}$ jest dodatni. Zatem możemy dalej przekształcić

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4} = \frac{-\Delta}{4} \left[\left(\frac{x + \frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}\right)^2 + 1 \right]. \quad (4)$$

Stosując teraz podstawienie (zamiana zmiennej) $t = \frac{x + \frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}$ sprowadzamy całkę $\int \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^n} dx$ do postaci, w której wyeliminowany będzie składnik bx :

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^n} dx &= \int \frac{Bx + C}{\left(\frac{-\Delta}{4}\right)^n \left[\left(\frac{x + \frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}\right)^2 + 1\right]^n} dx = \left(\frac{4}{-\Delta}\right)^n \int \frac{B\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t - \frac{b}{2}\right) + C}{(t^2 + 1)^n} \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} dt = \\ &= \left(\frac{4}{-\Delta}\right)^{n-1} \int \frac{t}{(t^2 + 1)^n} dt + \left(\frac{4}{-\Delta}\right)^{n-1/2} \left(C - B\frac{b}{2}\right) \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Tak więc musimy umieć obliczyć całki typu $\int \frac{t}{(t^2 + 1)^n} dt$ oraz $\int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt$. Pierwszą z nich oblicza się łatwo dzięki czynnikowi t w liczniku:

$$\int \frac{t}{(t^2 + 1)^n} dt = \begin{cases} \frac{1}{2(-n+1)} \frac{1}{(t^2 + 1)^{n-1}}, & \text{dla } n > 1, \\ \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1), & \text{dla } n = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Na przykład $\int \frac{t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + C$, $\int \frac{t}{(t^2 + 1)^2} dt = -\frac{1}{2} \frac{1}{t^2 + 1} + C$, $\int \frac{t}{(t^2 + 1)^3} dt = -\frac{1}{4} \frac{1}{(t^2 + 1)^2} + C$.

Drugą całkę $\left(I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}\right)$ można – całkując przez części – sprowadzić do całki $I_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{n-1}}$ (wzór redukcyjny). Mamy bowiem dla $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \frac{1}{(t^2+1)^n} dt = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^n} dt - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^n} dt = \int \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}} dt - \int t \frac{t}{(t^2+1)^n} dt = \\
 &= I_{n-1} - \int t \left(\frac{1}{2(-n+1)(t^2+1)^{n-1}} \right)' dt = I_{n-1} - \frac{t}{2(-n+1)(t^2+1)^{n-1}} + \int t' \frac{1}{2(-n+1)(t^2+1)^{n-1}} dt = \\
 &= I_{n-1} - \frac{t}{2(-n+1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(-n+1)} \int \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}} dt = I_{n-1} - \frac{t}{2(-n+1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(-n+1)} I_{n-1} = \\
 &= -\frac{t}{2(-n+1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Ponadto dla $n=1$ całka $I_1 = \int \frac{1}{t^2+1} dt = \arctg t + C$. Ostatecznie mamy wzory

$$I_n = \begin{cases} -\frac{t}{2(-n+1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}, & \text{dla } n > 1, \\ \arctg t + C, & \text{dla } n = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Tak więc **całkowanie funkcji wymiernych sprowadza się przede wszystkim do rozkładu danej funkcji wymiernej na sumę ułamków prostych**. Po dokonaniu takiego rozkładu każdy ułamek może scałkować wg schematu pisanego powyżej (wzory (2), (6), (7)).

W przypadku poszukiwania rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste kierujemy się poniższymi zasadami:

(i) Każdy czynniki **w mianowniku**, który ma postać $(x-\alpha)^m$, generuje następującą sumę:

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} \quad (8)$$

(ii) Każdy czynniki **w mianowniku**, który ma postać $(x^2+bx+c)^n$, przy warunku $\Delta = b^2 - 4c < 0$, generuje następującą sumę:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n} \quad (9)$$

Jak wyznaczyć współczynniki A_i, B_i, C_i będzie pokazane w przykładach. **W praktyce sprowadza się to do rozwiązywanie układów równań liniowych.**

PRZYKŁADY

1) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. Możemy tę całkę obliczyć tak jak zostało to pokazane przy wyprowadzeniu zależności (7) lub skorzystać wprost z tego wzoru. Dla praktyki wykonamy jednak jeszcze raz poszczególne kroki obliczania tej całki:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int x \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \\
 &= \operatorname{arctg} x - \int x \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \right)' dx = \operatorname{arctg} x - x \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \right) + \int x' \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\
 &= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.
 \end{aligned}$$

Zatem

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \quad (10)$$

2) $\int \frac{dx}{x^3+1}.$

Dokonujemy rozkładu mianownika na czynniki nierozkładalne, np. korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $a^3+b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1),$$

a następnie szukamy rozkładu funkcji wymiernej $\frac{1}{x^3+1}$ na ułamki proste postaci (1). Zauważmy, że trójmian kwadratowy x^2-x+1 jest nierozkładalny ($\Delta=-3<0$). Z reguł (8) i (9) postulujemy następujący rozkład na ułamki proste:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

skąd

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)}{x^3+1},$$

Aby zachodziła powyższa równość dla każdego $x \in \mathbb{R}$ musi zachodzić

$$1 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Porównanie współczynników wielomianów występujących po obu stronach daje linowy układ równań

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -A+B+C=0, \\ A+C=1. \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu: $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$, zatem

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \frac{-x+2}{x^2-x+1},$$

skąd $\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{-x+2}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} I$. Policzmy jeszcze całkę I :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-x+2}{x^2-x+1} dx = \int \frac{-x+2}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = -\int \frac{x}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx + 2 \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= -\frac{4}{3} \int \frac{x}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} dx + \frac{8}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Teraz stosujemy podstawienie $t = \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, więc $dt = \frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt$. Zatem

$$\begin{aligned} I &= -\frac{4}{3} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}}{t^2+1} \frac{\sqrt{3}}{2} dt + \frac{8}{3} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dt}{t^2+1} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \int \frac{t}{t^2+1} dt - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{4\sqrt{3}}{3} \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= -\int \frac{t}{t^2+1} dt + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} \right) \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{2} \ln(t^2+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} t. \end{aligned}$$

Wracając do „starej” zmiennej x otrzymujemy

$$I = -\frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1\right) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2\right) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Ostatecznie mamy po uproszczeniu

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln\left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

3) Obliczyć całkę $\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$.

Wielomian w mianowniku jest już rozłożony na czynniki $x-1$, x^2+1 , przy czym czynnik $x-1$ występuje dwukrotnie. Rozkład na sumę ułamków prostych jest zatem następujący

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}, \quad (11)$$

co po pomnożeniu przez mianownik $(x-1)^2(x^2+1)$ prowadzi do równości

$$x+1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Porządkujemy prawą stronę względem potęg x :

$$x+1 = (A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (A+C-2D)x + (-A+B+D),$$

skąd po porównaniu współczynników przy tych samych potęgach x uzyskujemy układ równań

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ -A + B - 2C + D = 0, \\ A + C - 2D = 1, \\ -A + B + D = 1, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $A = -1/2$, $B = 1$, $C = 1/2$, $D = -1/2$. Podstawiamy do (11):

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

Teraz możemy całkować:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \arctg x = -\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \arctg x, \end{aligned}$$

co można ostatecznie zapisać tak

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \arctg x + C.$$

4) Obliczyć całkę $\int \frac{x}{(x-2)(x^2+1)^2} dx$.

Mianownik jest iloczynem czynników nierozkładalnych: jeden czynnik $(x-2)$ i dwa czynniki (x^2+1) . Zatem zgodnie z informacją zawartą w (8) i (9) możemy postulować rozkład funkcji podcałkowej na następującą sumę ułamków prostych:

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}. \quad (12)$$

Mnożymy obie strony przez mianownik $(x-2)(x^2+1)^2$ co daje

$$x = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2+1) + (Dx+E)(x-2)$$

i porządkujemy

$$\begin{aligned} x &= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2+1) + (Dx+E)(x-2), \\ x &= A(x^4+2x^2+1) + (Bx+C)(x^3-2x^2+x-2) + Dx^2 + (-2D+E)x - 2E, \\ x &= (A+B)x^4 + (-2B+C)x^3 + (2A+B-2C+D)x^2 + (-2B+C-2D+E)x + A-2C-2E. \end{aligned}$$

Porównując współczynniki wielomianów po obu stronach równości otrzymujemy układ liniowy

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2B+C=0 \\ 2A+B-2C+D=0 \\ -2B+C-2D+E=1 \\ A-2C-2E=0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ:

$$B = -A \Rightarrow$$

$$2A + C = 0, A - 2C + D = 0, 2A + C - 2D + E = 1, A - 2C - 2E = 0.$$

$$C = -2A \Rightarrow$$

$$5A + D = 0, -2D + E = 1, 5A - 2E = 0.$$

$$D = -5A \Rightarrow$$

$$10A + E = 1, 5A - 2E = 0 \Rightarrow 25A = 2, 5E = 1 \Rightarrow A = 1/25, E = 1/5.$$

Ostatecznie: $A = 2/25, B = -2/25, C = -4/25, D = -10/25, E = 1/5$, więc rozkład (12) ma postać

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{25} + \frac{-2}{25} \frac{x}{x^2+1} + \frac{-4}{25} \frac{1}{x^2+1} + \frac{-10}{25} \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{25} \left(\frac{1}{x-2} - 2 \cdot \frac{x+2}{x^2+1} - 5 \cdot \frac{2x-1}{(x^2+1)^2} \right),$$

zatem całka

$$\int \frac{x}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{25} \left(\int \frac{1}{x-2} dx - 2 \cdot \int \frac{x+2}{x^2+1} dx - 5 \cdot \int \frac{2x-1}{(x^2+1)^2} dx \right). \quad (13)$$

Pierwsza całka to oczywiście $\ln|x-2|$, druga

$$\int \frac{x+2}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctg x,$$

a

trzecia

$$\int \frac{2x-1}{(x^2+1)^2} dx = 2 \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = 2 \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) \frac{1}{x^2+1} - \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{x^2+1} - \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx.$$

Ostatnie całka, $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$, jest policzona w **przykładzie 1** (wzór (10)). Można też skorzystać ze wzoru redukcyjnego (7). Mamy więc

$$\int \frac{2x-1}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \arctg x + C.$$

Wstawiamy policzone całki do (13) i porządkujemy

$$\begin{aligned} & \int \frac{x}{(x-2)(x^2+1)^2} dx \\ &= \frac{1}{25} \left(\ln|x-2| - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctg x \right) - 5 \cdot \left(-\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \arctg x \right) \right) + C \\ &= \frac{1}{25} \left(\ln|x-2| - \ln(x^2+1) - \frac{3}{2} \arctg x + \frac{5}{x^2+1} + \frac{5}{2} \frac{x}{x^2+1} \right) + C. \end{aligned}$$

5) Obliczyć całkę $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx$.

Oczywiście można zastosować ogólne podstawienie $t = \tg \frac{1}{2} x$, które sprowadzi tę całkę do postaci wymiernej, ale prościej będzie użyć podstawienia $t = \cos x$. Mamy więc

$$dt = -\sin x dx \Rightarrow dx = -dt / \sin x,$$

$$\frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{dt}{\sin^4 x} = -\frac{dt}{(1-t^2)^2},$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}.$$

Wystarczy więc całkę $\int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt$. Musimy więc dokonać rozkładu funkcji podcałkowej na ułamki proste. Funkcja całkowana ma postać

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2},$$

tak więc rozkład na ułamki proste będzie zawierał składniki $\frac{A}{1-t}$, $\frac{B}{(1-t)^2}$ oraz $\frac{C}{1+t}$, $\frac{D}{(1+t)^2}$:

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2}. \quad (14)$$

Stąd mamy dla każdego $t \in \mathbb{R}$

$$1 = A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1-t)^2(1+t) + D(1-t)^2.$$

Tym razem nie będziemy tworzyli układu równań liniowych tylko postaramy się uzyskać współczynniki manipulując powyższą równością (jest ona dla każdego $t \in \mathbb{R}$). Podstawiając kolejno $t=1, -1, 0$ uzyskujemy $B = \frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{4}$, $A+C = \frac{1}{2}$. Jeżeli pomnożymy teraz równość (14) przez $1+t$, a następnie obliczymy granicę obu stron przy $t \rightarrow \infty$, to otrzymamy dodatkowe równanie: $0 = -A+C$. Zatem $A = C = \frac{1}{4}$. Możemy teraz wstawić obliczone współczynniki A, B, C, D do (14)

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} \right],$$

więc

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt &= \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} \right] dt = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\ln |1-t| + \frac{1}{1-t} + \ln |1+t| - \frac{1}{1+t} \right) = \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{2t}{1-t^2} \right). \end{aligned}$$

Wracamy do wyjściowej zmiennej ($t = \cos x$):

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = -\frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{2t}{1-t^2} \right) = \frac{-1}{4} \left(\ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + \frac{2\cos x}{1-\cos^2 x} \right),$$

czyli

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + C.$$

ZADANIA

Zad. 1) Obliczyć całki nieoznaczone.

- 1) $\int \sin^2 x dx$.
- 2) $I_n = \int x^n e^{ax} dx$, $a \in \mathbb{R}$. (Wyprowadzić wzór rekurencyjny.)
- 3) $\int \sin^5 x dx$.
- 4) $I_n = \int \sin^n x dx$. (Wyprowadzić wzór redukcyjny.)
- 5) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.
- 6) $\int \frac{dx}{3 - 5x^2}$.
- 7) $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.
- 8) $\int \sqrt{1 + e^{ax}} dx$, $a \in \mathbb{R}$.

Wskazówki:

Ad 2) Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^n x dx = \int (\sin^{n-2} x)(1 - \cos^2 x) dx = \int \sin^{n-2} x dx - \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= I_{n-2} - \int \left(\frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \right)' \cos x dx = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \int \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x (\cos x)' dx \\ &= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \cos x - \int \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \sin x dx = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \cos x - \frac{1}{n-1} \int \sin^n x dx \\ &= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \cos x - \frac{1}{n-1} I_n. \end{aligned}$$

Możemy wyliczyć teraz I_n :

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \cos x - \frac{1}{n-1} I_n \\ \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) I_n &= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \cos x, \\ I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Ad 3) Podstawienie $t = \cos x$ oraz tożsamość $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2$.

Ad 8) Podstawienie $t = \sqrt{1 + e^{ax}}$.

Odpowiedzi: 1) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x)$; 2) $-\frac{5}{8} \cos x + \frac{5}{48} \cos 3x - \frac{1}{80} \cos 5x$; 3) $\arctg(1+x)$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \frac{5x + \sqrt{5}}{5x - \sqrt{5}}$;
5) $\frac{2 \sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x + \sin \frac{1}{2} x}$; 6) $\frac{2}{a} (\sqrt{1 + e^{ax}} - \arctg \sqrt{1 + e^{ax}})$.

Zad. 2) Obliczyć podane całki z funkcji wymiernych.

$$1) \int \frac{x}{2x^2 - 3x - 2}.$$

$$2) \int \frac{dx}{x^3 - 1}.$$

$$3) \int \frac{x+1}{x^3 - 4x}.$$

$$4) \int \frac{dx}{x^4 + x^2 - 2}.$$

$$5) \int \frac{x-1}{x^3 - 3x^2 + 4} dx.$$

$$6) * \int \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

Wskazówki. W zadaniach tych musimy dokonać rozkładu wielomianów (występujących w mianownikach) na czynniki nierozkładalne, czyli postaci $(x - \alpha)^m$, $(x^2 + bx + c)^n$, gdzie $\Delta = b^2 - 4c < 0$. W zadaniu **2)** wystarczy skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. W zadaniu **3)** rozkład jest prawie natychmiastowy $x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$ i dalej $x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$. W zadaniu **4)** możemy spróbować zamienić równanie czwartego stopnia na kwadratowe: oznaczamy $t = x^2$, i dokonać rozkładu trójmianu kwadratowego obliczając jego pierwiastki. Uzyskamy wtedy rozkład: $x^4 + x^2 - 2 = (x^2 + 2)(x - 1)(x + 1)$. W zadaniu **5)** proszę wykorzystać fakt, że jeden z pierwiastków mianownika to $x_1 = -1$. Aby dokonać dalszego rozkładu wystarczy wielomian podzielić przez dwumian $x - x_1 = x + 1$. W zadaniu **6)** mamy wielomian $x^4 + 1$. Rozkład na czynniki można przeprowadzić na dwa sposoby:

Sposób 1 (trudniejszy): Z teorii wiadomo, że każdy wielomian rzeczywisty można rozłożyć na czynniki liniowe lub kwadratowe (już nierozkładalne). Wielomian $x^4 + 1$ nie może jednak zawierać w swoim rozkładzie czynników liniowych (bo wtedy miałby przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty, a z postaci wielomianu widzimy, że nie może mieć żadnych pierwiastków w $\mathbb{R}$). Zatem w rozkładzie muszą występować tylko czynniki kwadratowe $x^4 + 1 = (x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2)$. Znaleźć współczynniki b_1, c_1, b_2, c_2 (wymnażając prawą stronę, porządkując i porównując z lewą stroną). Ponieważ zachodzić $c_1c_2 = 1$, więc można spróbować $c_1 = c_2 = 1$. Wtedy do wyznaczenia zostaną tylko b_1 i b_2 .

Sposób 2 (łatwiejszy – ale „trikowy”): $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2$.

Odpowiedzi: 1) $\frac{1}{10} \ln(2x+1) + \frac{2}{5} \ln(x-2)$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$;

3) $\frac{3}{8} \ln(2-x) - \frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{8} \ln(x+2)$; 4) $\frac{1}{6} (-\sqrt{2} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + \ln \frac{x-1}{x+1})$; 5) $\frac{1}{3(2-x)} + \frac{2}{9} \ln \frac{x-2}{x+1}$;

6) $\frac{1}{2\sqrt{2}} (\arctg(1-\sqrt{2}x) - \arctg(1+\sqrt{2}x)) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1-\sqrt{2}x+x^2}$.