

Część I: Granice funkcji, pochodne funkcji jednej zmiennej. Reguła de l'Hôspitala

DEFINICJA. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na odcinku $D \subset \mathbb{R}$. Jeżeli dla ustalonego punktu $x_0 \in D$ istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (1)$$

to mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 . Granicę tę oznaczamy przez $f'(x_0)$ i nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 . Tak więc z definicji mamy

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (2)$$

Wprowadzając oznaczenie $h = x - x_0$ możemy granicę, która występuje w (2) zapisać następująco

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3)$$

Jeżeli pochodna istnieje w każdym punkcie $x \in D$, to mamy określoną funkcję $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$, która każdemu elementowi dziedziny $x \in D$ przyporządkowuje pochodną $f'(x)$. Funkcję f' nazywamy pochodną funkcji f .

Oczywiście nie każda funkcja jest różniczkowalna, ale większość funkcji spotykanych w zastosowaniach posiada pochodną. Mamy ponadto prostą zależność pomiędzy ciągłością a różniczkowalnością funkcji:

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest też w nim ciągła.

Odwrotna implikacja nie zachodzi, o czym świadczy prosty przykład $f(x) = |x|$, dla $x \in \mathbb{R}$. Funkcja ta jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, gdyż $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0)$, ale $f'(0)$ nie istnieje, gdyż

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1. \end{aligned}$$

Tak więc granica prawostronna jest różna od lewostronnej, co oznacza że pełna granica nie istnieje, a to oznacza że nie istnieje pochodna funkcji $|x|$ w zerze. Ale warto podkreślić, że w innych punktach ta pochodna istnieje, na przykład dla $x > 0$ mamy

$$\begin{aligned} \text{dla } x > 0 \text{ zachodzi: } |x|' &= x' = 1, \\ \text{dla } x < 0 \text{ zachodzi: } |x|' &= (-x)' = -1. \end{aligned}$$

TWIERDZENIE. Niech funkcja $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ będą różniczkowalne w punkcie $x \in D$. Wtedy funkcje $f + g$, fg , f/g są różniczkowalne w punkcie x oraz zachodzą równości

- a) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

W punkcie c) zakładamy, że $g(x) \neq 0$.

POCHODNA FUNKCJI ZŁOŻONEJ

W wielu przypadkach jednak nie wystarczy posługiwanie się powyższymi tożsamościami do obliczenia pochodnej. Na przykład dla funkcji $\sin(x^3 + 2x)$ obliczenie pochodnej – mimo, że potrafimy obliczyć pochodną $\sin' x = \cos x$ oraz $(x^3 + 2x)' = 3x^2 + 2$ – w oparciu tylko o wzory a), b) i c) nie jest możliwe. Musimy jeszcze posłużyć się wzorem na *pochodną funkcji złożonej*. Poniższe twierdzenie przedstawia ten wzór.

TWIERDZENIE. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi. Ponadto zakładamy, że złożenie $g \circ f$ jest poprawnie określone, tj. $f(D) \subset G$. Wtedy funkcja $g \circ f$ jest też różniczkowalna i zachodzi równość

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \text{ dla } x \in D. \quad (4)$$

Pisząc nieco mniej formalnie możemy wzór (4) na pochodną funkcji złożonej zapisać tak

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x). \quad (5)$$

Przykłady

- a) Obliczyć pochodną funkcji $\sin(x^3 + 2x)$.

Mamy $\sin(x^3 + 2x) = g(f(x))$, gdzie $g(x) = \sin x$, $f(x) = x^3 + 2x$. Zatem

$$\begin{aligned} (\sin(x^3 + 2x))' &= \sin'(x^3 + 2x) \cdot (x^3 + 2x)' = \\ &= \cos(x^3 + 2x) \cdot (3x^2 + 2) = (3x^2 + 2) \cos(x^3 + 2x). \end{aligned}$$

- b) Obliczyć pochodną funkcji $\sqrt[3]{\ln x}$.

Mamy $\sqrt[3]{\ln x} = g(f(x))$, gdzie $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = \ln x$. Zatem

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{\ln x})' &= (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{3}(\ln x)^{-2/3} \cdot (\ln x)' = \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{\ln^2 x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3x\sqrt[3]{\ln^2 x}}. \end{aligned}$$

- c) Obliczyć pochodną funkcji $e^{\sqrt{\cos x + 2x^3}}$.

Zauważmy, że pochodna funkcji zewnętrznej, e^x , pokrywa się z nią samą: $\frac{d}{dx} e^x = e^x$. Zatem

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} e^{\sqrt{\cos x + 2x^3}} &= e^{\sqrt{\cos x + 2x^3}} \cdot \frac{d}{dx} (\sqrt{\cos x + 2x^3}) = e^{\sqrt{\cos x + 2x^3}} \left(\frac{d}{dx} \sqrt{\cos x} + \frac{d}{dx} 2x^3 \right) = \\ &= e^{\sqrt{\cos x + 2x^3}} \left(\frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \frac{d}{dx} \cos x + 2 \cdot 3x^2 \right) = e^{\sqrt{\cos x + 2x^3}} \left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} + 6x^2 \right).\end{aligned}$$

REGUŁA DE L'HÔSPITALA

Przy obliczaniu granic funkcji możemy posłużyć się pochodnymi stosując tzw. *regułę de l'Hôspitala*. Dotyczy to przede wszystkim tak zwanych symboli nieoznaczonych $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Inne przypadki, np. $0 \cdot \infty$, 1^∞ , można sprowadzić do poprzednich.

Niech $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi, a x_0 niech będzie punktem skupienia dziedziny D . Wtedy:

- a) Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ oraz istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- b) Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ oraz istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Przykłady

- 1) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, więc możemy stosować regułę de l'Hôspitala:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

- 2) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, więc możemy stosować regułę de l'Hôspitala:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

- 3) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x}$. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \operatorname{tg} x) = 0 - 0 = 0$ i $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0 - 0 = 0$,

więc możemy stosować regułę de l'Hôspitala:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{tg} x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x} = - \frac{2}{1} = -2. \end{aligned}$$

- 4) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$, więc możemy stosować regułę de l'Hôspitala. Będziemy ją stosowali dwukrotnie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

- 5) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - \sqrt[m]{x}}$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$. Możemy stosować regułę de l'Hôspitala, gdyż

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - \sqrt[n]{x}) = \lim_{x \rightarrow 1} (1 - \sqrt[m]{x}) = 0:$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - \sqrt[m]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt[n]{x})'}{(1 - \sqrt[m]{x})'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{1/n})'}{(x^{1/m})'} = \frac{m}{n} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{n-1}{n}}}{x^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m}{n}.$$

W przypadku tej granicy można trochę sobie ułatwić obliczenia stosując zamianę zmiennych $x = t^{n \cdot m}$, zanim wykorzystamy regułę de l'Hôspitala. Mamy wtedy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - \sqrt[m]{x}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{t^{nm}}}{1 - \sqrt[m]{t^{nm}}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - t^m}{1 - t^n} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1 - t^m)'}{(1 - t^n)'} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{0 - mt^{m-1}}{0 - nt^{n-1}} = \frac{m}{n} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{m-1}}{t^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m}{n}.$$

Zauważmy też, że granicę $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - t^m}{1 - t^n}$ możemy łatwo obliczyć bez obliczania pochodnych i stosowanie reguły de l'Hôspitala. Wystarczy tylko dokonać rozkładu wielomianów. Mamy bowiem:

$$1 - x^k = (1 - x)(1 + x + \dots + x^{k-1}),$$

zatem

$$\frac{1 - t^n}{1 - t^m} = \frac{(1 - t)(1 + t + \dots + t^{n-1})}{(1 - t)(1 + t + \dots + t^{m-1})} = \frac{1 + t + \dots + t^{n-1}}{1 + t + \dots + t^{m-1}} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \frac{\overbrace{1 + 1 + \dots + 1}^{n \text{ razy}}}{\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m \text{ razy}}} = \frac{n}{m}.$$

6) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$. Granica ta jest typu $0 \cdot \infty$, więc aby móc stosować regułę musimy zamienić ją na ∞/∞ lub $0/0$. Na przykład $x \ln x = (\ln x)/(1/x)$ i jest to symbol nieoznaczony typu ∞/∞ , zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

7) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$. Granica ta jest typu 0^0 – jest to kolejny typ symbolu nieoznaczonego.

Aby zamienić go na problem $0 \cdot \infty$ wykorzystamy logarytm naturalny następująco $x = e^{\ln x}$. Mamy zatem

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}.$$

Pokazaliśmy już poprzednio, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, zatem $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$.

8) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\sqrt{x}}$. Z poprzedniego punktu wiemy, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$, zatem

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x - 1) = 0$. Mamy więc symbol nieoznaczony $0/0$. Obliczamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x^2} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{x \ln x} - 1)'}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} (x \ln x)'}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \frac{\ln x + 1}{2x} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 1}{x}. \end{aligned}$$

Pierwszą granicę już obliczyliśmy, więc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} x^x = \frac{1}{2}$, natomiast druga granica jest symbolem nieoznaczonym ∞/∞ . Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 0,$$

i ostatecznie $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.

INNE OZNACZENIA POCHODNEJ

Nie zawsze oznaczenie pochodnej symbolem prim (') jest wygodne. Wzory fizyko-chemiczne często zawierają wiele parametrów względem których może być wykonywane różniczkowanie. Wtedy wygodniej jest używać takiego oznaczenia na pochodną, które wyraźnie podkreśla względem której zmiennej różniczkujemy. Mamy zatem oznaczenie

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Przykłady

Równanie Arrheniusa – opisuje zależność stałej szybkości reakcji od temperatury

$$k = A \cdot e^{-E_a/RT}.$$

Oczywiście określenie „stała” jest tutaj konwencjonalną nazwą tej wielkości używaną w chemii. Matematycznie funkcja ta nie jest funkcją stałą – wyraźnie widać przecież, że zależy od T .

Pochodna tej „stałej szybkości” względem temperatury wynosi

$$\begin{aligned}\frac{dk}{dT} &= \frac{d}{dT} k = \frac{d}{dT} (A \cdot e^{-E_a/RT}) = A \frac{d}{dT} e^{-E_a/RT} = A e^{-E_a/RT} \frac{d}{dT} \frac{-E_a}{RT} = \\ &= A e^{-E_a/RT} \frac{-E_a}{R} \frac{d}{dT} \frac{1}{T} = A e^{-E_a/RT} \frac{-E_a}{R} \frac{-1}{T^2} = \frac{E_a}{RT^2} A e^{-E_a/RT} = \frac{E_a}{RT^2} k.\end{aligned}$$

Szybkość korozji i opór polaryzacji – w zagadnieniach korozji metali ważna jest tzw. gęstość prądu korozyjnego, j_{corr} (oznaczanego także jako i_{corr}) oraz powiązanego z nim oporu polaryzacji, R_p . Można go wyznaczyć ze wzoru Stearn-Geary'a

$$R_p = B / i_{corr},$$

gdzie B jest ważnym parametrem, który daje się wyrazić przy pomocy współczynników Tafela b_a , b_c oraz b_c wzorem: $B = b_a b_c / 2,303(b_a + b_c)$. Stearn i Geary wyprowadzili ten wzór wykorzystując definicję R_p :

$$R_p = \left(\frac{dE}{dI} \right)_{E_{corr}}, \quad (6)$$

oraz wersję wzoru Butlera–Volmera (krzywa polaryzacji elektrodowej – zależność gęstości prądu od nadpotencjału) dla elektrody korodującej¹

$$j = j_{corr} \left(e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} - e^{-\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \right), \quad (7)$$

gdzie E – potencjał elektrody, E_{corr} – tzw. potencjał korozyjny, T – temperatura (K), a R i F to stała gazowa i stała Fardaya.

Policzmy zatem pochodną $\frac{dj}{dE}$:

¹ Por. A. Kiswa, „Elektrochemia cz. II Elektrodyka”, WNT, 2001, (str. 105, 303).

$$\begin{aligned} \frac{dj}{dE} &= \frac{d}{dE} j_{corr} \cdot \left(e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} - e^{\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \right) = j_{corr} \cdot \left(\frac{d}{dE} e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} - \frac{d}{dE} e^{\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \right) = \\ &= j_{corr} \cdot \left(e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} \frac{d}{dE} \frac{F}{RTb_a} (E-E_{corr}) - e^{\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \frac{d}{dE} \frac{-F}{RTb_c} (E-E_{corr}) \right) = \\ &= j_{corr} \cdot \left(e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} \frac{F}{RTb_a} \frac{d}{dE} (E-E_{corr}) - e^{\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \frac{-F}{RTb_c} \frac{d}{dE} (E-E_{corr}) \right) = \\ &= \frac{j_{corr} F}{RT} \left(e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} \frac{1}{b_a} + e^{\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \frac{1}{b_c} \right). \end{aligned}$$

Do tak obliczonej pochodnej wstawiamy teraz $E = E_{corr}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dj}{dE} \right)_{E_{corr}} &= \frac{j_{corr} F}{RT} \left(e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} \frac{1}{b_a} + e^{\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \frac{1}{b_c} \right) \Bigg|_{E=E_{corr}} = \frac{j_{corr} F}{RT} \left(e^0 \frac{1}{b_a} + e^0 \frac{1}{b_c} \right) = \\ &= \frac{j_{corr} F}{RT} \left(\frac{1}{b_a} + \frac{1}{b_c} \right) = \frac{j_{corr} F}{RT} \frac{b_a + b_c}{b_a b_c}. \end{aligned}$$

Wracając do wzoru (6) otrzymujemy R_p

$$R_p = \frac{dE}{dj} \Bigg|_{E_{corr}} = \frac{1}{\frac{dj}{dE} \Big|_{E_{corr}}} = \frac{1}{\frac{j_{corr} F}{RT} \frac{b_a + b_c}{b_a b_c}} = \frac{RT}{F} \frac{b_a b_c}{b_a + b_c} \Rightarrow \boxed{B = \frac{RT}{F} \frac{b_a b_c}{b_a + b_c}}$$

Zadania (Część I)

Zad. 1) Znajdź granice funkcji:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 5x + 6}$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{2x^2 + 3x + 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x - \sin 2x}$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 5x^2 + 6x - 8}$

6) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x} - 1}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)}$

Rozwiązania wybranych zadań

Zad. 1.8)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \ln(x+1))'}{(x \ln(x+1))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{(x+1)\ln(x+1) + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x+1)\ln(x+1) + x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x+1) + 1 + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x+1) + 2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Zad. 2) Znajdź granice

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x - \arcsin x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x)$

3) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}}{t - 1}$

4) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{(2x - \pi)^2}$

5) $\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{\tg \alpha}{\ln(\cos \alpha)}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ctg x - 1}{x^2}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x - \sin \beta x}{x}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$

Rozwiązania wybranych zadań

Zad 2.4)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{(2x - \pi)^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(\ln(\sin x))'}{((2x - \pi)^2)'} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2 \cdot 2 \cdot (2x - \pi)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x}{4} \cdot \frac{\cos x}{2x - \pi} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x}{4} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{2x - \pi} = \frac{\sin(\pi/2)}{4} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{2x - \pi} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{2x - \pi} \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\sin x}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Zad 2.5)

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{\tg \alpha}{\ln(\cos \alpha)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{1}{-\sin \alpha \cos \alpha}.$$

$\downarrow$
 $0^\pm$

Mianownik zmierza do 0, zatem pełna granica nie istnieje (ułamek zmierza do $\pm\infty$). Istnieją natomiast granice jednostronne

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow (\pi/2)^+} \frac{\tg \alpha}{\ln(\cos \alpha)} &= \lim_{\alpha \rightarrow (\pi/2)^+} \frac{1}{-\sin \alpha \cos \alpha} = -\infty, \\ &\quad \downarrow \\ &\quad 0^+ \\ \lim_{\alpha \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\tg \alpha}{\ln(\cos \alpha)} &= \lim_{\alpha \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{1}{-\sin \alpha \cos \alpha} = +\infty, \\ &\quad \downarrow \\ &\quad 0^-\end{aligned}$$

Zad 2.6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \frac{\cos x}{\sin x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right],$$

ale nie stosujemy w tym momencie de l'Hôpitala, gdyż wyrażenie się komplikuje. Lepiej jest jeszcze nieco przekształcić i dopiero potem stosować regułę:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}}_1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Zad. 3) Znajdź granice

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{b^x}$, gdzie $a, b > 0$ dane stałe.

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-1/x}$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2(x+1)}{\sqrt{x}}$

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sin x)^2 \ln x}{\sqrt[3]{x}}$

Rozwiązania wybranych zadań

Zad 3.2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x\sqrt{1 + 1/x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zad 3.7) Granica jest typu $\left[\frac{0}{0} \right]$, ale nie od razu będziemy stosować regułę de l'Hôpitala. Najpierw przekształcenie

$$\frac{\ln^2(x+1)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln^2(x+1)}{(x^{1/4})^2} = \left(\frac{\ln(x+1)}{x^{1/4}} \right)^2.$$

Teraz stosujemy regułę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x^{1/4}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x+1))'}{(x^{1/4})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{4}x^{-3/4}} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{3/4}}{x+1} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{3/4}}{x+1} = 0.$$

$$\text{Ostatecznie } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2(x+1)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x^{1/4}} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x^{1/4}} \right)^2 = 0^2 = 0.$$

Zad. 4) Znajdź granice

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^2)}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)(1 - \cos x)}{x^4}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} (e^x - \cos x)}{x + 2\sqrt{x}}$

Rozwiązania wybranych zadań

Zad 4.1)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^2)} = [0^0] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^2 \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x}.$$

Wystarczy obliczyć granicę w wykładniku:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-2} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0.$$

Tak więc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^2)} = e^0 = 1.$

Zad 4.5)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\ln(\sin x)})^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln(\sin x)}.$$

Obliczamy teraz granicę wykładnika

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln(\sin x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 \cos x}{\sin x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos x = -\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x}}_1 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos x}_{0 \cdot 1} = 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln(\sin x)} = e^0 = 1$.

Zad 4.6)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} (e^x - \cos x)}{x + 2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - \cos x)}{x + 2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \cos x}{\sin x}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - \cos x)}{x + 2\sqrt{x}}.$$

Pierwszy składnik

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0,$$

Drugi składnik

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - \cos x)}{x + 2\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \sin x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1+0}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Zad. 5*) Znajdź granice

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - (\sin x)^x}{x^\alpha}$ gdzie $\alpha > 0$ dana liczba

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$

Część II: Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej

Wzór Taylora jest jednym z ważniejszych twierdzeń rachunku różniczkowego. Pozwala on dowolną dostatecznie regularną funkcję przybliżać lokalnie wielomianem: jeżeli funkcja jest n -krotnie różniczkowalna w otoczeniu ustalonego punktu, to można ją „dobrze” aproksymować lokalnie przy pomocy odpowiednio dobranej wielomianu (stopnia nie większego niż n). Ponadto wzór ten daje możliwość określenia błędu z jakim ta aproksymacja jest uzyskana. Istnieje wiele wersji wzoru Taylora, które różnią się sposobem opisu tego błędu, zwanego *resztą*, natomiast wielomian aproksymujący jest zawsze takiej samej postaci. Najczęściej używa się wzoru Taylora z *resztą Lagrange’a* lub z *resztą Cauchy’ego*. W obu tych przypadkach reszta jest wyrażona w postaci różniczkowej. Istnieje też wersja wzoru Taylora, w której reszta jest w postaci całkowej.

WZÓR TAYLORA Z RESZTĄ LAGRANGE’A. Jeżeli $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest n -krotnie różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz n -ta pochodna jest ciągła, to dla dowolnych $x_0, x_0 + h \in (a, b)$ zachodzi

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)h^{n-1} + R_n(x_0, h), \quad (8)$$

gdzie reszta $R(x_0, h)$ ma postać

$$R_n(x_0, h) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h)h^n \quad (9)$$

dla pewnego $0 < \vartheta < 1$ zależnego na ogół od x_0 oraz h .

Wzór Taylora (8) z wyrażeniem na resztę (9) można interpretować tak: jeżeli funkcja jest „dostatecznie regularna”, to można ją przybliżać wielomianem odpowiedniego stopnia, przy czym błąd przybliżenia jest rzędu h^n . W praktyce inżynierskiej resztę się pomija pisząc

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)h^{n-1}, \quad (10) \sim$$

Niekiedy wzór Taylora zapisujemy nieco inaczej: zamiast $x_0 + h$ używamy $x = x_0 + h$. Wtedy $h = x - x_0$ i wzór (8) można przepisać tak

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1} + R_n(x_0, x), \quad (11)$$

gdzie reszta (Lagrange’a) ma postać

$$R_n(x_0, x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))(x - x_0)^n. \quad (12)$$

Gdy pominiemy resztę („bo jest mała”), to z (11) mamy

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1} \quad (13)$$

Przy ustalonym punkcie x_0 występujące w tym wzorze współczynniki $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0)$ są stałymi, to widać że wyrażenie po prawej stronie jest po prostu wielomianem (zmienną x) co najwyższej stopnia n .

Wzór Maclaurina

Jest to szczególny przypadek wzoru Taylora – podstawiamy w (11) $x_0 = 0$, czyli rozwijamy funkcję wokół punktu 0. Otrzymujemy wyrażenie

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)x^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\vartheta x)x^n, \quad (14)$$

gdzie $0 < \vartheta < 1$. (Czasami zamiast $f^{(n)}(\vartheta x)$ piszemy $f^{(n)}(\xi)$, gdzie $\xi \in (0, x)$).

Przykład. Niech $f(x) = \sin x$. Podać wzór Taylora w punkcie $x_0 = 0$ dla $n = 4$.

Rozwiązanie: Mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x)' = \cos x, & f^{(2)}(x) &= (\cos x)' = -\sin x, \\ f^{(3)}(x) &= (-\sin x)' = -\cos x, & f^{(4)}(x) &= (-\cos x)' = \sin x, \\ f^{(5)}(x) &= (\sin x)' = \cos x, & f^{(6)}(x) &= (\cos x)' = -\sin x. \end{aligned}$$

Ponieważ $f(0) = 0, f^{(1)}(0) = 1, f^{(2)}(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, f^{(5)}(0) = 1$, więc

$$\sin(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{3!} x^3 + 0 + \frac{1}{5!} x^5 + R_5(x),$$

czyli $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R(x)$, gdzie $R(x) = \frac{1}{4!} \sin(\vartheta x)x^4$. Pomijając resztę, która „jest mała” otrzymujemy następujące przybliżenie dla funkcji $\sin x$ w otoczeniu zera ($x_0 = 0$):

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5.$$

To ile składników wielomianu Taylora będziemy brali do przybliżenia danej funkcji w zastosowaniach zależy od potrzebnej dokładności. Np. może wystarczyć jeden lub dwa pierwsze:

$$\sin x \approx x, \quad \sin x \approx x - \frac{1}{6} x^3.$$

łatwo zauważyć ogólny wzór na rozwinięcie funkcji sinus, w którym występują tylko nieparzyste potęgi względem x :

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} \dots \quad (15)$$

Przykład. Zapisać wzór Taylora (11) dla funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ w otoczeniu punktu $x_0 = 0$. Podać $n = 5$ wyrazów rozwinięcia.

Rozwiązanie: Zauważmy, że funkcja $f(x) = \ln(1+x)$ jest określona dla $x \in (-1, \infty)$, więc podane rozwinięcie będzie prawdziwe dla wszystkich $x > -1$. Podstawą jest oczywiście znajomość pochodnej funkcji logarytm. W tym przypadku mamy

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5},$$

zatem

$$f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = 1 \cdot 2, \quad f^{(4)}(0) = -1 \cdot 2 \cdot 3, \quad f^{(5)}(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,$$

skąd wnioskujemy, że $f^{(k)}(0) = (-1)^k (k-1)!$, więc $\frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = (-1)^k \frac{(k-1)!}{k!} = (-1)^k \frac{(k-1)!}{(k-1)!k} = \frac{(-1)^k}{k}$.

Ostatecznie

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \dots$$

Przykład. Podać rozwinięcie Maclaurina dla funkcji $f(x) = e^x$.

Rozwiązanie: Musimy policzyć pochodne funkcji, co w tym przypadku jest łatwe, gdyż $(e^x)' = e^x$.

Zatem $f^{(n)}(x) = e^x$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$, więc $f^{(n)}(0) = 1$. Wzór (14) daje teraz

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots$$

Przykład. Rozwinąć w szereg Taylora funkcję tangens wokół zera.

Rozwiązanie: dla $f(x) = \operatorname{tg} x$ mamy

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}, \quad f'''(x) = \frac{2(2 - \cos 2x)}{\cos^4 x}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{4(5 - \cos 2x) \sin x}{\cos^4 x},$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{16 + 88 \sin^2 x + 16 \sin^4 x}{\cos^6 x}, \quad f^{(6)}(x) = \frac{16(2(3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x) \sin^2 x + 11(3 \sin^2 x + \cos^2 x)) \sin x}{\cos^7 x},$$

$$f^{(7)}(x) = \dots$$

skąd dla $x = 0$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 16, \quad f^{(6)}(0) = 0, \quad f^{(7)}(0) = 272, \dots$$

co daje

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \frac{272}{7!}x^7 + R_8 = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + O(x^8) \quad (16)$$

dla $|x| < \pi/2$. Zapis $O(x^8)$ oznacza, że błąd jest rzędu x^8 . May więc

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7. \quad (17)$$

Uwaga. W przypadku funkcji tangens rozwinięcie w szereg Taylora nie ma już tak prostej ogólnej postaci jak np. dla funkcji $\sin$, $\cos$, $\ln$ czy $\exp$. Ogólna postać rozwinięcia dla tg (uogólnienie wzoru (16)) można zapisać przy pomocy tzw. *liczb Bernoulliego* (B_n), które pojawiają się w innych działach matematyki (teoria liczb, kombinatoryka, teoria rozwinięć asymptotycznych,...).

Przykład. Zastosujemy wzór Maclaurina dla funkcji e^x i $\sin x$, a także postaramy się oszacować dokładność uzyskanego przybliżenia. Obie funkcje określone są na całej osi rzeczywistej, $x \in \mathbb{R}$, a ponadto posiadają pochodne dowolnego rzędu (są nieskończenie wiele razy różniczkowalne). Oznacza to, wzór (14) można zastosować dla każdego $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

(a) Niech $f(x) = e^x$. Mamy $f(0) = 1$ oraz

$$f'(x) = (e^x)' = e^x, f''(x) = e^x, \text{ itd. } f^{(k)}(x) = e^x \text{ dla } k \in \mathbb{N},$$

a zatem $f^{(k)}(0) = 1$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$ skąd dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, \quad (18)$$

gdzie $0 < \theta < 1$. Liczba θ zależy od x .

(b) Niech $f(x) = \sin x$. Mamy $f(0) = 0$ oraz

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x)' = \cos x, f''(x) = (\cos x)' = -\sin x, f'''(x) = (-\sin x)' = -\cos x, \\ f^{(4)}(x) &= (-\cos x)' = \sin x, f^{(5)}(x) = (\sin x)' = \cos x, \dots \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned} f'(0) &= \cos 0 = 1, f''(0) = -\sin 0 = 0, f'''(0) = -\cos 0 = -1, \\ f^{(4)}(0) &= \sin 0 = 0, f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1, \dots \end{aligned}$$

tj. $f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, f^{(5)}(0) = 1, \dots$ Można to zapisać w skrócie tak

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, f^{(2k)}(0) = 0 \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

Ostatecznie wzór Maclaurina (14) dla $f(x) = \sin x$ przyjmie postać

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\vartheta x). \quad (19)$$

zatem

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}. \quad (20)$$

[Nieobowiązkowe]

Widać, że reszta, mimo iż zawiera nieznaną parametr $\vartheta \in (0, 1)$, może być łatwo oszacowana z góry:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\vartheta x) \right| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} |\cos(\vartheta x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot 1 = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Oznacza to, że gdy przybliżamy funkcję $\sin x$ wielomianem

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \varepsilon,$$

to błąd ε jest nie większy niż $\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Na przykład $\sin(0,2)$ przybliżymy następująco

$$\sin(0,2) = 0,2 - \frac{(0,2)^3}{3!} + \varepsilon = 0,198667 + \varepsilon,$$

gdzie $|\varepsilon| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{|0,2|^{2 \cdot 2 + 1}}{(2 \cdot 2 + 1)!} = \frac{|0,2|^5}{5!} = 2,67 \cdot 10^{-6}$. Tak więc mamy $\sin(0,2) \approx 0,198667$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku. Gdy w rozwinięciu Taylora dla $\sin(0,2)$ weźmiemy jeszcze jeden składnik (ściślej mówiąc dwa, ale jeden jest zerowy, więc mowa tu o kolejnym niezerowym), to otrzymamy

$$\sin(0,2) = 0,2 - \frac{(0,2)^3}{3!} + \frac{(0,2)^5}{5!} + \varepsilon = 0,198669(3) + \varepsilon,$$

gdzie $|\varepsilon| \leq \frac{|0,2|^7}{7!} = 2,54 \cdot 10^{-9}$. Tak więc mamy $\sin(0,2) \approx 0,19866933\dots$ z dokładnością do ośmiu miejsc po przecinku!

Granice funkcji a szereg Taylora

Granice funkcji w punkcie możemy obliczać stosując rozwinięcie w szereg Taylora. Czasami jest to wygodniejszy sposób niż stosowanie reguły de L'Hôpitala.

Przykład. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x^3}-1}$.

Rozwiązanie. Widać, że jest to granica 0/0. Wykorzystamy rozwinięcia

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right)x^2 + \dots = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

Podstawiając w pierwszym $x \rightarrow x^2$, a w drugim $x \rightarrow x^3$ otrzymamy

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \dots$$

$$\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \dots$$

Wyrażenia te wstawiamy do funkcji, dla której liczymy granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \dots \right)}{1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \dots - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots \right)}{x^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^3 + \dots \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots}{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^3 + \dots} = 2.$$

Przybliżanie pochodnych przy pomocy skończonych ilorazów różnicowych

Często zachodzi potrzeba przybliżenia pochodnych przy pomocy wartości samej funkcji. Przykładowo problem ten pojawia się w *metodach numerycznych* przy rozwiązywaniu tzw. równań różniczkowych. Najprostszy sposób uzyskania takiego przybliżenia sugeruje sama definicja pochodnej, z której wynika następujące wyrażenie

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad (21)$$

przy czym spodziewamy się, że w ogólnym przypadku im mniejsze będzie $|h| > 0$, tym lepsze będzie przybliżenie. Okazuje się, że błąd przybliżania pochodnej wg wzoru (21) zależy liniowo od $|h|$, czyli dwukrotne zmniejszenie $|h|$ daje w ogólności tylko dwukrotnie lepszą dokładność. Nie jest to zbyt dobre przybliżenie.

W ilorazie różnicowym (21) zakładamy tylko $h \neq 0$, ale w zastosowaniach wyróżniamy dwa przypadki (a) dodatni przyrost, $h > 0$ oraz (b) ujemny przyrost, $-h < 0$. Mamy wtedy różnice skończoną „do przodu” i „wstecz”:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \text{gdzie } h > 0, \quad (22)$$

oraz

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, \quad \text{gdzie } h > 0. \quad (23)$$

Ostatnie wyrażenie powstaje z podstawienia $-h$ do (21) w miejsce h .

Dokładniejszy sposób przybliżania pierwszej pochodnej daje iloraz różnicowy „centralny”

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}, \quad (24)$$

w którym błąd jest rzędu h^2 . Powyższy iloraz różnicowy jest bardzo często wykorzystywany w obliczeniach numerycznych.

Wzór Taylora może być wykorzystywany do wyprowadzania różnych ilorazów różnicowych przybliżających pochodne oraz do dokładnego oszacowania błędu przybliżenia.

TWIERDZENIE. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie daną funkcją oraz $x_0, x_0 \pm h \in [a, b]$. Wtedy

a) jeżeli f jest różniczkowalna dwukrotnie w sposób ciągły, to

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + r(h), \quad (25)$$

gdzie $|r(h)| \leq M \cdot |h|$ oraz stała $M > 0$ nie zależy od x_0, h .

b) jeżeli f jest różniczkowalna trzykrotnie w sposób ciągły, to

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + r(h), \quad (26)$$

gdzie $|r(h)| \leq M \cdot h^2$ oraz stała $M > 0$ nie zależy od x_0, h .

Jak widać z tego twierdzenia aproksymowanie pierwszej pochodnej przy pomocy ilorazów różnicowych do przodu i wstecz jest rzędu $O(h)$, natomiast iloraz centralny daje aproksymację rzędu $O(h^2)$.

Dowód (**nieobowiązkowy**). Podstawowym narzędziem będzie wzór Taylora. Z (11) mamy dla h

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0 + \theta h)h^2, \\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0 + \theta h)h,$$

zatem $|r(h)| = \frac{1}{2} |f''(x_0 + \theta h)| h \leq \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} \{ |f''(x)| \} |h| = M \cdot |h|$, gdzie jak widzimy

$M = \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} \{ |f''(x)| \} < \infty$. Skończoność stałej M wynika z założenia, że f ma drugą pochodną ciągłą w przedziale $[a, b]$.

Przypadek różnicy centralnej analizujemy podobnie, ale tym razem wzór Taylora wykorzystamy dwukrotnie: raz podstawiamy h , a za drugim razem podstawiamy $-h$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0 + \vartheta_1 h)h^3,$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 - \frac{1}{3!} f'''(x_0 - \vartheta_2 h)h^3$$

gdzie $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0, 1)$ nie muszą być równe. Odejmując stronami

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2f'(x_0)h + \frac{1}{6}(f'''(x_0 + \vartheta_1 h) - f'''(x_0 - \vartheta_2 h))h^3,$$

i dzieląc przez $2h$ otrzymamy

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{1}{12}(f'''(x_0 + \vartheta_1 h) + f'''(x_0 - \vartheta_2 h))h^2,$$

$$\text{zatem } |r(h)| = \frac{1}{12} |(f'''(x_0 + \vartheta_1 h) + f'''(x_0 - \vartheta_2 h))| h^2 \leq \frac{1}{6} \max_{a \leq x \leq b} \{ |f'''(x)| \} h^2 = M \cdot h^2,$$

Twierdzenie uzasadnia wcześniejsze uwagi dotyczące jakości przybliżania pochodnej podanymi ilorazami różnicowymi. Podaje też precyzyjne warunki (istnienie ciągłej pochodnej f'' lub f'''), ale w praktyce wyrażamy te założenia pisząc, że funkcja powinna być „dostatecznie regularna”.

Do aproksymowania drugiej pochodnej często wykorzystujemy następującą *różnicę centralną*

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}, \quad (27)$$

gdzie błąd – jak za chwilę pokażemy – jest rzędu h^2 .

Twierdzenie. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją czterokrotnie różniczkowalną w sposób ciągły oraz $x_0, x_0 \pm h \in [a, b]$. Wtedy

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} + r(h),$$

gdzie $|r(h)| \leq M \cdot h^2$ oraz stała $M > 0$ nie zależy od x_0, h .

Dowód (**nieobowiązkowy**). wzór Taylora (8) wykorzystamy dwukrotnie: raz podstawiamy h , a za drugim razem podstawiamy $-h$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0 + \vartheta_1 h)h^4,$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 - \frac{1}{3!} f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0 + \vartheta_2 h)h^4,$$

gdzie $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0, 1)$ nie muszą być równe. Dodajemy stronami

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{2}{2!} f''(x_0)h^2 + \frac{1}{4!} (f^{(4)}(x_0 + \vartheta_1 h) + f^{(4)}(x_0 + \vartheta_2 h))h^4,$$

co po uporządkowaniu i podzieleniu przez h^2 daje

$$\frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0) + \frac{1}{4!}(f^{(4)}(x_0 + \vartheta_1 h) + f^{(4)}(x_0 + \vartheta_2 h))h^2,$$

zatem

$$\begin{aligned} |r(h)| &= \frac{1}{4!} |(f^{(4)}(x_0 + \vartheta_1 h) + f^{(4)}(x_0 + \vartheta_2 h))| h^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{24} (\max_{a \leq x \leq b} \{ |f^{(4)}(x)| \} + \max_{a \leq x \leq b} \{ |f^{(4)}(x)| \}) h^2 = \frac{1}{12} \max_{a \leq x \leq b} \{ |f^{(4)}(x)| \} h^2 = M \cdot h^2, \end{aligned}$$

gdzie $M = \frac{1}{12} \max_{a \leq x \leq b} \{ |f^{(4)}(x)| \} < \infty$.

Zadania (część II)

Zad. 1) Znaleźć rozwinięcia w szereg Taylora podanych funkcji.

(i) $f(x) = \sqrt{1+x}$ dla $x_0 = 0$, $n = 5$.

(ii) $f(x) = \sqrt[k]{1+x}$ dla $x_0 = 0$, $n = 6$.

(iii) $f(x) = (1+x)^\alpha$ dla $x_0 = 0$, $n = 5$, gdzie $\alpha > 0$ jest daną ustaloną liczbą.

(iv) $f(x) = (1+x)^x$ dla $x_0 = 0$ do wyrazu x^3 .

Zad. 2) Używając rozwinięcia w szereg Taylora obliczyć podane granice.

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x(1 - \cos x)}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sqrt[3]{1+x^2} - x \sin x - 3}{x(\sin x - \operatorname{tg} x)}$.

(iii)* $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x} \ln(1+\sqrt{x}) - e^x \sin 2x}{x(\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1)}$.

Zad. 3) Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i narysować ich wykres.

(a) $f(x) = xe^x$

(b) $f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$

(c) $f(x) = (1+x)^x$

(d) $f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$

(e) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

(f) $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 10x^2 + 12x - 1$

(g) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$

Zad. 4) Udowodnić nierówność

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Zad. 5) [Nowe] Zależność gęstości prądu (A/m²) od nadpotencjału dla pewnych reakcji elektrodowych opisane jest równaniem Butlera–Volmera²

$$j = j_0 \left(K_a \exp \left((1 - \alpha) \frac{F}{RT} \eta \right) - K_c \exp \left(-\alpha \frac{F}{RT} \eta \right) \right),$$

gdzie F to stała Faradaya, R uniwersalna stała gazowa, T temperatura (K), j_0 to tzw. gęstość prądu wymiany, K_a i K_c związane są z szybkościami reakcji w kierunku anodowym i katodowym, odpowiednio. Współczynnik α jest zwany *współczynnikiem symetrii*. Jego wartość jest często w pobliżu 0,5. W zadaniu przyjmijmy $T=298$ K, $\alpha=0,5$, $K_a=1,2 \cdot 10^{-2}$, $K_c=3,5 \cdot 10^{-4}$.

(i) Dla jakich potencjałów η prąd ma charakter anodowy ($j > 0$), a dla jakich katodowy ($j < 0$)? Czy odpowiedź zależy od prądu wymiany j_0 ?

(ii) Doświadczalnie można obserwować dla odpowiednio dodatnich lub ujemnych wartości potencjału elektrody liniową zależność potencjału od logarytmu gęstości prądu, $\eta = a \pm b \log |j|$. Jest to *równanie Tafela*. Uzasadnić to równanie na bazie wzoru Butlera–Volmera. Wyrazić współczynniki a , b poprzez fizyczne stałe występujące w równaniu Butlera–Volmera.

(iii) Dla małych (bliskich zera) nadpotencjałów η obserwuje się liniową zależność gęstości prądu od nadpotencjału. Uzasadnić tę zależność i zidentyfikować współczynnik nachylenia prostej. Dla jakich wartości potencjału liniowa zależność opisuje z dokładnością do 99% gęstość prądu?

² W literaturze elektrochemicznej pojawia się wiele form tego równania (por. np. A. Kiswa, „Elektrochemia cz. II Elektrodyka”, WNT, 2001). Zawsze jednak występuje wykładnicza zależność gęstości prądu na elektrodzie od potencjału.