

Zadanie 1. Oblicz podane całki podwójne. W każdym z przypadków postaraj się naskicować podzbiór płaszczyzny, po którym całkujemy.

1) $\iint_{\Omega} xy^2(x-y) dx dy$, gdzie $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3, x < y < x^2\}$.

2) $\iint_{\Omega} \sqrt[3]{xy} dx dy$, gdzie Ω jest prostokątem o wierzchołkach $A(1, 2), B(3, 2), C(3, 7), D(1, 7)$.

3) $\iint_A \frac{y}{1+x^2} dx dy$, gdzie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

4) $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$, gdzie $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

5) $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$, gdzie a) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$, b) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

6) $\iint_{\Delta} (x+y) dx dy$, gdzie Δ jest trójkątem o wierzchołkach $A(1, 2), B(5, 5), C(2, 7)$.

7) $\iint_{\Omega} xy dx dy$, gdzie Ω jest górną połową elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Odpowiedzi: 1) $-\frac{1012242}{135} = -757,348$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 (3\sqrt[3]{3}-1)(7\sqrt[3]{7}-2\sqrt[3]{2})$; 3) $\frac{1}{4} \ln 2$; 4) 0; 5) $\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2}$; 6)

$\frac{527}{48} + \frac{1615}{32} = \frac{5899}{96} = 61,4479$; 7) 0.

Wskazówka: Zastosować zamianę zmiennych podobną do współrzędnych biegunowych: $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$. W tym przypadku jacobian transformacji wynosi abr .

Zadanie 2. Obliczyć całkę $I_a = \iint_{A_a} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$, gdzie obszar całkowania jest pierścieniem zdefiniowanym następująco $A_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq a^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Ile wynosi granica $\lim_{a \rightarrow 0^+} I_a$? Jaka jest interpretacja dotycząca objętości odpowiedniej figury?

Odpowiedź: $I_a = 2\pi \ln \frac{R}{a}$, $\lim_{a \rightarrow 0^+} I_a = +\infty$.

Wskazówka: Zastosować współrzędne biegunowe.

Zadanie 3. Obliczyć całki $f(R) = \iint_{\Omega_R} x^2 + y^2 dx dy$, $g(R) = \iint_{\Omega_R} x^4 + y^4 dx dy$, gdzie w obu przypadkach Ω_R jest kołem o promieniu $R \geq 0$ i środku $(0, 0)$. Porównać przebieg zmienności obu funkcji, $f(R)$ i $g(R)$. Czy funkcje przecinają się w jakimś punkcie innym niż $R = 0$?

Wskazówka: W obu przypadkach należy wykorzystać współrzędne biegunowe. W drugim przypadku, aby uprościć całkowanie należy skorzystać z poniższych wzorów:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (r \cos \varphi)^4 + (r \sin \varphi)^4 = r^4 (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) = r^4 ((\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 - 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) \\ &= r^4 (1^2 - \frac{1}{2} (2 \sin \varphi \cos \varphi)^2) = r^4 (1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi). \end{aligned}$$

Całkę $\int \sin^2 x dx$ najłatwiej obliczyć korzystając z tożsamości $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

Odpowiedź: $f(R) = \frac{\pi}{4} R^4$, $g(R) = \frac{\pi}{4} R^6$.

Zadanie 4. Obliczyć wartość całki

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

stosując współrzędne biegunowe w całce podwójnej

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Obszar całkowania to $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$, czyli pierwsza ćwiartka prostokątnego układu współrzędnych.

Odpowiedź: $\sqrt{\pi}$.

Zadanie 5. Oblicz objętość kuli o promieniu R dwoma sposobami:

- i) Jako objętość pod wykresem odpowiedniej funkcji (całka podwójna).
- ii) Jako całkę potrójną z funkcji równej 1: $f(x, y, z) = 1$. Zastosować do obliczenia całki współrzędne sferyczne.

Zadanie 6. Obliczyć objętość elipsoidy o półosiach a, b, c . Zastosować metodę jak w Zadaniu 3, ii), ale nieco zmodyfikować zamianę zmiennych (współrzędne sferyczne).