

## Liczby zespolone – podstawy

Równanie  $x^2 + 1 = 0$  nie ma rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ . Tak więc nie każdy wielomian o współczynnikach należących do zbioru  $\mathbb{R}$  posiada miejsce zerowe należące do tego samego zbioru. Z punktu widzenia teorii wielomianów rzeczywistych i równań algebraicznych (tzn. wielomianowych) jest to istotna wada. Okazuje się jednak, że zbiór liczb rzeczywistych zawiera się w większym zbiorze *liczb zespolonych*  $\mathbb{C}$ , który już tej „wady” nie posiada. Początki teorii liczb zespolonych sięgają pierwszej połowy XVI wieku i są zasługą głównie matematyków włoskich – przede wszystkim Girolamo Cardano, Scipione del Ferro i Lodovico Ferrari.

Przypomnijmy, ze wstępnego kursu matematyki, że *iloczyn kartezjański* zbiorów  $X$  i  $Y$ , oznaczany symbolem  $X \times Y$ , jest to zbiór uporządkowanych par  $(x, y)$ , gdzie  $x \in X$  i  $y \in Y$ ; zatem

$$X \times Y \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Iloczyny kartezjańskie występują w matematyce bardzo często. Na przykład płaszczyzna liczb zespolonych jest to iloczyn kartezjański  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (w skrócie –  $\mathbb{R}^2$ ), gdzie  $\mathbb{R}$  jest zbiorem liczb rzeczywistych.

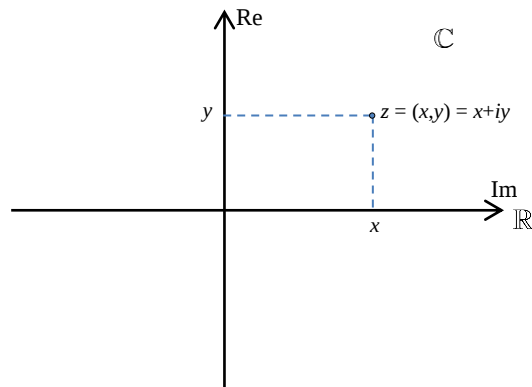
**DEFINICJA.** Zbiór  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , w którym zdefiniowano dwa działania dwuargumentowe  $+$  oraz  $\cdot$  następująco

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (1)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad (2)$$

nazywamy *zbiorem liczb zespolonych*.<sup>1</sup> Elementy tego zbioru nazywamy *liczbami zespolonymi*. Działanie „+” nazywamy dodawaniem (zespolonym), a działanie „ $\cdot$ ” nazywamy mnożeniem (zespolonym). Dla danej liczby zespolonej  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  liczbę rzeczywistą  $x$  nazywamy *częścią rzeczywistą*, natomiast  $y$  *częścią urojoną* liczby zespolonej  $z$ . Część rzeczywistą liczby zespolonej  $z$  oznaczamy przez  $\operatorname{Re} z$ , a część urojoną przez  $\operatorname{Im} z$ . Tak więc mamy:  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ . Z definicji zbioru liczb zespolonych wynika, że możemy je interpretować jako punkty na płaszczyźnie z układem współrzędnych OXY. Oś rzędnych (pozioma, OX) nazywamy osią rzeczywistą (Re), a oś odciętych (pionowa, OY) – osią urojoną (Im).

<sup>1</sup> Ściśle rzecz biorąc, w matematyce zbiór  $\mathbb{C}$  (oznaczany też symbolem  $\mathbb{C}$ ) wraz z podanymi działaniami nazywa się *ciałem liczb zespolonych*. Terminologia ta związana jest z tym, że w algebrze ogólnej rozważa się przede wszystkim tzw. struktury algebraiczne. Najważniejsze z nich to **grupa**, **pierścień** i **ciało**. Każda z tych struktur ma zdefiniowane działania, które posiadają pewne charakterystyczne własności. Okazuje się, że liczby zespolone ze swoimi działaniami  $+$  i  $\cdot$  spełniają kryteria dla ciała (algebraicznego). Podobnie jest z liczbami rzeczywistymi – to też jest ciało algebraiczne (ale istotnie różne od ciała liczb zespolonych).



W zbiorze  $\mathbb{C}$  możemy wyróżnić podzbiór par  $(x, 0)$ , który ma wszystkie formalne własności liczb rzeczywistych. Dlatego możemy przyjąć, że  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , a geometrycznie zbiór liczb rzeczywistych utożsamić z poziomą osią na płaszczyźnie zespolonej.

Rolę jedynki w zbiorze  $\mathbb{C}$  pełni liczba  $(1, 0)$ , gdyż

$$z \cdot (1, 0) = (x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) = z. \quad (3)$$

Z definicji (1) i (2) wynika, że działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych mają typowe własności znane z arytmetyki liczb rzeczywistych. Niech  $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ . Wtedy:

- 1)  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  (*przemienność dodawania*)
- 2)  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  (*łączność dodawania*)
- 3)  $z + 0 = z$ , gdzie  $0 = (0, 0)$  (*istnienie elementu neutralnego dodawania*)
- 4)  $\forall z \in \mathbb{C} \exists w \in \mathbb{C}$  takie, że  $z + w = 0$  (*istnienie elementu przeciwnego względem dodawania*)
- 5)  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$  (*przemienność mnożenia*)
- 6)  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$  (*łączność mnożenia*)
- 7)  $1 \cdot z = z$  gdzie  $1 = (1, 0)$  (*istnienie elementu neutralnego dla mnożenia*)
- 8) jeżeli  $z \neq 0$ , to istnieje  $w \in \mathbb{C}$  takie, że  $z \cdot w = 1$  (*istnienie elementu przeciwnego względem mnożenia – nazywamy go liczbą odwrotną*)
- 9)  $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$  (*rozdzielność mnożenia względem dodawania*)

Szczególą rolę w zbiorze liczb zespolonych pełni liczba  $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ , którą z powodów historycznych nazywamy *jednostką urojoną*. Obliczmy jej kwadrat (mnożenie zgodne ze wzorem (2)):

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1,$$

gdyż jak już wiemy liczba postaci  $(1, 0) \in \mathbb{C}$  pełni rolę jedynki w  $\mathbb{C}$  i jest możemy ją po prostu oznaczyć symbolem 1. Tak więc równanie  $z^2 + 1 = 0$  w zbiorze  $\mathbb{C}$  ma rozwiązanie  $z_1 = i$  (oczywiście

drugim rozwiązaniem jest  $z_2 = -i$ ). Co więcej, łatwo sprawdzić, że są to jedyne rozwiązania, gdyż zachodzi tożsamość

$$z^2 + 1 = (z - i)(z + i),$$

którą sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem:

$$(z - i)(z + i) = z^2 + zi - iz - i^2 = z^2 - (-1) = z^2 + 1.$$

Używając zatem znanego oznaczenia na pierwiastek kwadratowy możemy napisać:  $\sqrt{-1} = i$  lub  $\sqrt{-1} = -i$ . Jest to jak najbardziej *realna* równość, tyle że istnieje ona w „szerszej” strukturze algebraicznej – w zbiorze zespolonych  $\mathbb{C}$ .

### Postać algebraiczna i sprzężenie liczby zespolonej

Z formalnej definicji liczb zespolonych wiemy, że są to pary  $(x, y)$  liczb rzeczywistych. W praktyce (zwłaszcza rachunkowej) posługiwanie się takim zapisem nie jest wygodne. Postać algebraiczna takiej pary to wyrażenie  $x + iy$  dla  $x, y \in \mathbb{R}$ . Postać ta wynika z przyjętych działań w  $\mathbb{C}$ . Mamy zatem

$$z = (x, y) = x + iy,$$

gdzie wykorzystaliśmy utożsamienie liczb  $(x, 0)$ ,  $(y, 0)$  z liczbami rzeczywistymi  $x$ ,  $y$ .

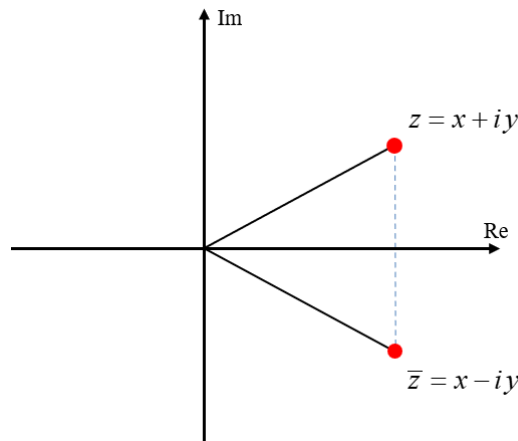
Posługiwanie się taką reprezentacją liczb zespolonych niezwykle ułatwia wykonywanie standardowych rachunków (mnożenie, dzielenie, dodawanie). Należy tylko pamiętać, że  $i^2 = -1$ , a do wyrażenia  $x + iy$  stosować znane prawa (łączność, przemienność, rozdzielność). Niech na przykład  $z_1 = 2 + 5i$ ,  $z_2 = 3 - 2i$ . Wtedy mamy

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2 + 5i + 3 - 2i = 5 + 3i, \\ z_1 \cdot z_2 &= (2 + 5i) \cdot (3 - 2i) = 6 - 4i + 15i - 10i^2 = 6 + 11i - 10 \cdot (-1) = 16 + 11i, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2 + 5i}{3 - 2i} = \frac{(2 + 5i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{6 + 4i + 15i + 10i^2}{3^2 - (2i)^2} = \frac{6 + 19i + 10(-1)}{9 - 4(-1)} = \frac{-4 + 19i}{13} = \frac{-4}{13} + \frac{19}{13}i. \end{aligned}$$

**DEFINICJA.** Sprzężeniem liczby zespolonej  $z = x + iy$  nazywamy liczbę zespoloną  $\bar{z}$  określoną wzorem  $\bar{z} = x - iy$ .

Uwaga: w fizyce, chemii czy naukach technicznych częściej używanym oznaczeniem na sprzężenie jest symbol  $z^*$ .

Geometrycznie liczba sprzężona do  $z$  na płaszczyźnie zespolonej  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  jest jej obrazem w symetrii osiowej względem osi  $OX$  (**Rys. 1**). Dla liczby  $z \in \mathbb{R}$  sprzężenie pokrywa się z tą liczbą, gdyż wtedy  $y = \operatorname{Re} z = 0$ .



Rys. 1. Geometrycznie liczba sprzężona do  $z$  jest jej obrazem w symetrii osiowej względem osi  $OX$ .

**FAKT 1.** (Własności sprzężenia zespolonego). Niech  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Wtedy zachodzą równości:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2}, & \overline{z_1 - z_2} &= \overline{z_1} - \overline{z_2}, & \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1} \overline{z_2}, \\ \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, & \overline{\overline{z}} &= z, & z + \overline{z} &= 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z. \end{aligned}$$

### Moduł liczby zespolonej

**DEFINICJA.** Modułem liczby zespolonej  $z = (x, y) = x + iy$  nazywamy liczbę rzeczywistą  $|z|$  określoną wzorem  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Z definicji wynika, że moduł liczby zespolonej jest nieujemny:  $|z| \geq 0$ . Ponadto  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ . Jeżeli  $z \neq 0$ , to  $|z| > 0$ .

Moduł liczby zespolonej jest uogólnieniem pojęcia *wartości bezwzględnej* liczby rzeczywistej. Geometrycznie moduł  $|z|$  jest równy odległości liczby  $z \in \mathbb{C}$  od początku układu współrzędnych na płaszczyźnie zespolonej.

Dla dwóch liczb zespolonych  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  mamy  $z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ , więc

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

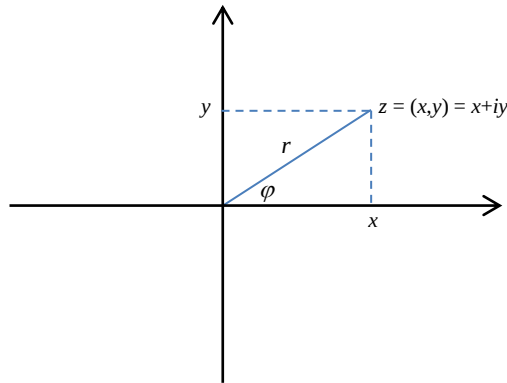
co oznacza, że moduł różnicy,  $|z_1 - z_2|$ , jest równy *odległości pomiędzy punktami*  $z_1, z_2$  na płaszczyźnie zespolonej.

**FAKT 2.** (Własności modułu liczby zespolonej). Niech  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Wtedy mamy

- |                                                                       |                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 1) $ \overline{z}  =  z  =  -z $ ,                                    | 2) $z\overline{z} =  z ^2$ ,                                |
| 3) $ z_1 z_2  =  z_1   z_2 $ ,                                        | 4) $\left  \frac{z_1}{z_2} \right  = \frac{ z_1 }{ z_2 }$ , |
| 5) $ z_1 + z_2  \leq  z_1  +  z_2 $ ,                                 | 6) $  z_1  -  z_2   \leq  z_1 - z_2 $ ,                     |
| 7) $ \operatorname{Re} z  \leq  z ,  \operatorname{Im} z  \leq  z $ . |                                                             |

### Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Jak już wiemy liczby zespolone możemy reprezentować jako punkty na płaszczyźnie zespolonej  $\mathbb{C}$ , która geometrycznie jest tożsama z płaszczyzną  $\mathbb{R}^2$ . Istotnym dodatkiem do tej struktury jest mnożenie takich punktów (lub wektorów) zdefiniowane wzorem (2). Jednak standardowa reprezentacja liczby zespolonej  $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ , gdzie  $x, y \in \mathbb{R}$  są współrzędnymi kartezjańskim punktu nie zawsze jest wygodna. Czasami wygodna jest reprezentacja odpowiadająca współrzędnym biegunowym: odległość  $r \geq 0$  od środka  $(0, 0)$  oraz kąt  $0 \leq \varphi < 2\pi$  pomiędzy osią  $OX$  a półprostą przechodzącą przez środek i liczbę  $z = (x, y)$ .



Jeżeli  $z = x + iy \neq 0$ , to istnieje dokładnie jedna liczba  $0 \leq \varphi < 2\pi$  taka, że

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|}. \quad (4)$$

Tak określoną liczbę będziemy nazywać *argumentem głównym* liczby zespolonej  $z \neq 0$ . Przyjmujemy dla  $z = 0$  argument  $\varphi = 0$ . Tak więc mamy  $x = |z| \cos \varphi$ ,  $y = |z| \sin \varphi$ , co daje

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (5)$$

gdzie  $r = |z| \geq 0$ . Ten sposób przedstawienia liczby zespolonej nazywamy *postacią trygonometryczną*.

Jeżeli dopuścimy w reprezentacji trygonometrycznej (5) dowolne argumenty  $\varphi \in \mathbb{R}$  (bez ograniczenia się do przedziału  $[0, 2\pi)$ ), to przedstawienie (5) nie jest jednoznaczne, ale różne argumenty będą różniły się o całkowitą wielokrotność liczby  $2\pi$ :

$$z = r(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z}.$$

**Przykład.** Podane liczby zespolone  $z = x + iy$  zapiszemy w postaci trygonometrycznej:

a)  $z = 1 \Rightarrow z = 1 + i \cdot 0$ , skąd

$$z = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = \cos 0 + i \sin 0;$$

b)  $z = -1 \Rightarrow z = -1 + i \cdot 0$ , skąd

$$z = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = \cos \pi + i \sin \pi;$$

c)  $z = 1 + i \Rightarrow$

$$z = |z| (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = \sqrt{1^2 + 1^2} (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}).$$

d)  $z = 2 + i \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$$|z| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{4}{3}} = \sqrt{4 + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \text{ Ponadto mamy}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{2}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6},$$

zatem  $z = \frac{4\sqrt{3}}{3} (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}).$

### Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych zapisanych w postaci trygonometrycznej

Niech  $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Wtedy mamy dla iloczynu:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &+ i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzorów na kosinus sumy oraz na sinus sumy. Tak więc przy mnożeniu liczb zespolonych moduły się mnożą, a argumenty dodają. Przy dzieleniu argumenty będą się odejmowały

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2)^2 - (i \sin \varphi_2)^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{(\cos \varphi_2)^2 + (\sin \varphi_2)^2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{1} \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

### Funkcje zmiennej zespolonej. Wzór Eulera

Wszystkie znane z rachunku różniczkowego elementarne funkcje zmiennej rzeczywistej  $x \in \mathbb{R}$  ( $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$ , ...) można rozszerzyć na zbiór liczb zespolonych (lub jego podzbiór – tak jest z funkcją logarytm). We współczesnym podejściu w matematyce, definicje tych funkcji opierają się na rozwinięciu w szereg potęgowy Taylora, np.

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{dla } z = x + iy \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Tak określone funkcje przyjmują wartości wychodzące poza  $\mathbb{R}$ , zatem mamy

$$\sin, \cos, \exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Pewne własności tych funkcji znane z analizy rzeczywistej, np. okresowość funkcji  $\sin$  i  $\cos$ , czy jedynka trygonometryczna, są zachowane

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad (7)$$

ale inne nie – na przykład funkcje  $\sin$  i  $\cos$  nie są ograniczone w zbiorze  $\mathbb{C}$ , tzn.

$$\text{zachodzi } |\sin x| \leq 1 \text{ dla } x \in \mathbb{R}, \text{ ale moduł } |\sin z| \text{ nie jest ograniczony dla } z \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

Przykładowo  $\sin(1+i) \approx 1,298 + 0,635i$  skąd  $|\sin(1+i)| \approx 1,445$ .

Funkcja logarytm może także być rozszerzona, ale nie na całą płaszczyznę zespoloną. Najbardziej naturalne jest rozszerzenie funkcji  $\ln(x)$  na zbiór  $\mathbb{C} \setminus \{(x, y) : x \leq 0, y = 0\}$  (czyli wycinamy całą półoś liczb ujemnych wraz z zerem). Natomiast funkcja  $\sqrt{x}$  określona w dziedzinie rzeczywistej tylko dla  $x \geq 0$ , po przejściu do wariantu dla liczb zespolonych jest określona dla dowolnej liczby zespolonej:  $\sqrt{z}$  istnieje dla każdego  $z \in \mathbb{C}$ .

Pomiędzy funkcjami  $\sin$ ,  $\cos$  oraz  $\exp$  istnieje ważny związek (którego nie widać gdy funkcje te rozpatrujemy tylko na osi rzeczywistej):

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (9)$$

Równości te są równoważne następującej tożsamości  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ , której szczególnym przypadkiem jest słynną *tożsamość Eulera*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

W szczególnym przypadku, gdy do (10) podstawimy  $x = \pi$  i wykorzystamy  $\cos \pi = -1$ ,  $\sin \pi = 0$ , to otrzymamy  $e^{i\pi} = -1$ , czyli

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (11)$$

### Wzór de Moivre'a

Niech  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . Wtedy  $z^2 = z \cdot z = \cos(\varphi + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi)$ , czyli  $z^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$ . Podobnie  $z^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$ . Ogólnie mamy: dla dowolnej liczby rzeczywistej  $\varphi \in \mathbb{R}$  oraz liczby całkowitej  $n \in \mathbb{Z}$  zachodzi

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (12)$$

Równość (12) nazywamy *wzorem de Moivre'a* (czyt. *muawra*).

**Przykład.** Doprowadzimy do prostszej postaci liczbę zespoloną  $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{26}$ . Postać trygonometryczna liczby  $z$ :

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}.$$

Ze wzoru de Moivre'a mamy:

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)^{26} &= \cos\left(26 \cdot \frac{11\pi}{6}\right) + i \sin\left(26 \cdot \frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{143\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{143\pi}{3}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{5\pi + 138\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi + 138\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3} + 46\pi\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3} + 46\pi\right) = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Podsumowując, mamy:  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{26} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ .

**Pierwiastkowanie liczb zespolonych**

Niech  $w \in \mathbb{C}$ . Pierwiastkiem stopnia  $n \in \mathbb{N}$  z liczby  $w$  nazywamy każdą liczbę zespoloną  $z$  taką, że

$$z^n = w. \quad (13)$$

Jest to definicja analogiczna do pierwiastka rzeczywistego  $x \in \mathbb{R}$  z liczby rzeczywistej  $a \in \mathbb{R}$ :

$$x^n = a.$$

W przypadku rzeczywistym nie zawsze istnieje pierwiastek (gdy wykładnik  $n$  jest parzysty oraz  $a < 0$ ). Ponadto gdy  $a > 0$ , to mamy wtedy dwa pierwiastki (różniące się znakiem). W przypadku gdy wykładnik jest nieparzysty, to dla dowolnego  $a \in \mathbb{R}$  istnieje dokładnie jeden pierwiastek stopnia  $n$ . W przypadku zespolonym sytuacja jest bardziej klarowna: *każda liczba zespolona różna od zera ma dokładnie  $n$  różnych pierwiastków w zbiorze  $\mathbb{C}$* . Spróbujemy teraz opisać te pierwiastki.

Zauważmy, że z definicji (13) wynika, że jeżeli  $w \in \mathbb{R}$ , to

$$z \text{ jest pierwiastkiem} \Leftrightarrow \bar{z} \text{ jest pierwiastkiem}$$

Wynika to z faktu, że sprzężenie iloczynu jest iloczynem sprzężeń (**Fakt 1**), co prowadzi do równości  $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ . Z równości tej wynika, że dla  $w \in \mathbb{R}$  zachodzi  $z^n = w \Leftrightarrow \bar{z}^n = \bar{w} \Leftrightarrow (\bar{z})^n = w$ , gdyż dla  $w \in \mathbb{R}$  jest  $\bar{w} = w$ .

Pierwiastkowanie liczby zespolonej najwygodniej jest opisać, gdy liczba ta jest przedstawiona w postaci trygonometrycznej. Zapiszmy zatem obie liczby występujące w równości (13) w postaci trygonometrycznej  $z = |z|(\cos \psi + i \sin \psi)$ ,  $w = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Podstawiając tak wyrażone liczby do (13) otrzymujemy

$$z^n = |z|^n (\cos \psi + i \sin \psi)^n = |z|^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Aby ostatnia równość była spełniona, muszą zachodzić:

$$|z|^n = |w| \quad \text{oraz} \quad \cos n\psi = \cos \varphi, \quad \sin n\psi = \sin \varphi,$$

skąd  $n\psi - \varphi = 2k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ . Tak więc liczba  $z \in \mathbb{C}$  ma moduł i argument określony następująco

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}, \quad \psi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Jednak ostatnie wyrażenie daje tak naprawdę  $n$  różnych argumentów  $\psi_k$  dla  $k = 0, \dots, n-1$ , gdyż dla  $k = n$  argument  $\psi_n$  różni się od  $\psi_0$  o dokładnie  $2\pi$ , czyli przedstawia tę samą liczbę  $z$ . Podobnie jest z pozostałymi wartościami  $k > n$  oraz  $k < 0$ . Ostatecznie otrzymujemy następujący zbiór różnych pierwiastków liczby  $w = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $w \neq 0$ :

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (14)$$

**Przykład.** Podać wszystkie pierwiastki stopnia 3 z liczby 1.

Mamy  $w = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$ . Zatem  $|w| = 1$ ,  $\varphi = 0$ , co po wstawieniu do (14) daje pierwiastki

$$z_k = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{0+2k\pi}{3} + i \sin \frac{0+2k\pi}{3} \right) \text{ dla } k=0,1,2,$$

czyli

$$z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2 = \cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} = \cos \pi + i \sin \pi = -i.$$

Ostatecznie w ciele  $\mathbb{C}$  mamy  $\sqrt[3]{1} = \{1, \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ .

**Przykład.** Podać wszystkie pierwiastki stopnia 4 z liczby -1.

Liczba  $w = -1 = -1 + i \cdot 0$ , zatem  $|w|=1$  oraz  $\cos \varphi = -1$  skąd argument główny  $\varphi = \pi$ . Zatem  $w = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$ . Obliczamy pierwiastek stopnia  $n = 4$ , więc

$$z_k = \sqrt[4]{1} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

To daje cztery następujące pierwiastki (por. Rys. 2):

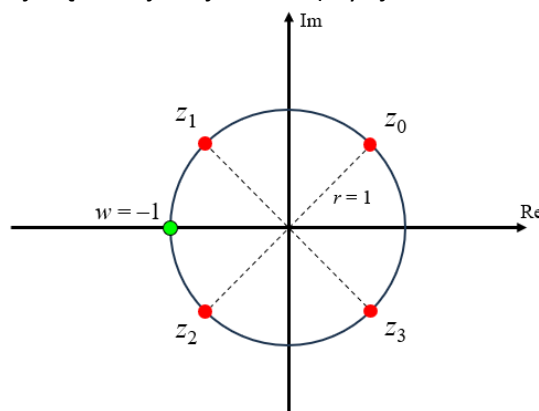
$$z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$z_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$$

$$z_3 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

Ostatecznie w ciele  $\mathbb{C}$  mamy  $\sqrt[4]{-1} = \{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\}$ . Zauważmy też, że pierwiastki te występują parami  $z$  oraz  $\bar{z}$  (liczba i liczba do niej sprzężona). Jest tak zawsze, gdy pierwiastkujemy liczbę, której część urojona jest zero (czyli jest to liczba rzeczywista).



Rys. 2. Pierwiastki zespolone  $\sqrt[4]{-1}$  (czerwone kółka). Tworzą wierzchołki kwadratu.

### Zasadnicze twierdzenie algebry

Jak już wiemy zbiór liczb zespolonych pozwala pierwiastkować dowolną liczbę (patrz (14)). Okazuje się, że ta własność jest szczególnym przypadkiem innej ogólniejszej i bardzo fundamentalnej własności ciała  $\mathbb{C}$ , która mówi, że w  $\mathbb{C}$  każdy wielomian ma miejsce zerowe.

**TWIERDZENIE (ZASADNICZE TWIERDZENIE ALGEBRY).** Każdy wielomian zespolony różny od stałej ma miejsce zerowe.