

Całka wielokrotna (całka oznaczona funkcji wielu zmiennych)

Wprowadzenie. Do obliczania całek funkcji wielu zmiennych możemy stosować *twierdzenie Fubiniego*, które sprowadza takie całki do tzw. *całek iterowanych*.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ będzie zbiorem mierzalnym. Elementy tego zbioru będziemy traktować jak pary $x = (x_1, x_2)$, gdzie $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$. Funkcja określona na Ω , czyli $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją dwóch zmiennych (x_1, x_2) . Twierdzenie Fubiniego stwierdza, że przy pewnych założeniach (sumowalność funkcji f) wielowymiarową całkę $\int_{\Omega} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ (oznaczaną też $\iint_{\Omega} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$) można sprowadzić do całek postaci $\int \left(\int f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$ lub $\int \left(\int f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$. Zauważmy, że całki $\int f(x_1, x_2) dx_1$, $\int f(x_1, x_2) dx_2$, są względem pojedynczych zmiennych, x_1 lub x_2 . Na przykład w wyrażeniu $\int f(x_1, x_2) dx_1$ całkujemy względem x_1 przy ustalonym punkcie x_2 .

TWIERDZENIE (FUBINIEGO). Załóżmy, że zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ jest mierzalny. Jeżeli $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna na zbiorze Ω , to zachodzą równości

$$\iint_{\Omega} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_{x_2}} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_{x_1}} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1, \quad (1)$$

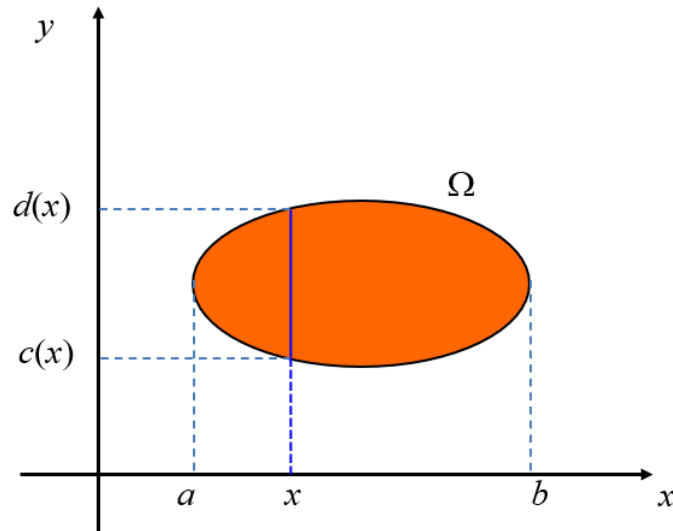
gdzie Ω_1 jest rzutem zbioru Ω na podprzestrzeń $\mathbb{R}^{n_1}$, a Ω_{x_1} jest przekrojem zbioru Ω hiperpłaszczyzną $x = x_1$, tzn. $\Omega_{x_1} = \{x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} : (x_1, x_2) \in \Omega\}$. Analogicznie określamy Ω_2 i Ω_{x_2} .

Przypadek całek funkcji dwóch lub trzech zmiennych ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ lub $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$)

W praktyce całki iterowane będziemy stosowali w przypadku $n = 2$ lub $n = 3$, tzn. dla podzbiorów w przestrzeniach $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$. Punkty będą na ogół oznaczane przez (x, y) i (x, y, z) . Na przykład dla $n = 2$ wzór (1) przyjmuje wtedy postać (gdy zbiór Ω jest wypukły)

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx, \quad (2)$$

gdzie odcinek (a, b) jest rzutem zbioru $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ na oś poziomą, a odcinek (c, d) jest rzutem tego zbioru na oś pionową. Zauważmy, że cięcie zbioru wypukłego Ω prostą pionową przechodzącą przez x jest odcinkiem, który oznaczamy $(a(x), b(x)) = \Omega_x$. Sytuacja ta jest pokazana na Rys. 1.



Rys. 1. Ilustracja pokazując obliczanie całek iterowanych dla przypadku $n = 2$. Zmienna x przebiega odcinek $[a, b]$. Dla każdego ustalonego x z tego przedziału zmienna y przebiega odcinek $[c(x), d(x)]$.

Przykład 1. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem $f(x, y) = xy$. Obliczyć całkę $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$, gdy:

(i) $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$,

(ii) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2 \text{ oraz } x^2 < y < x\}$.

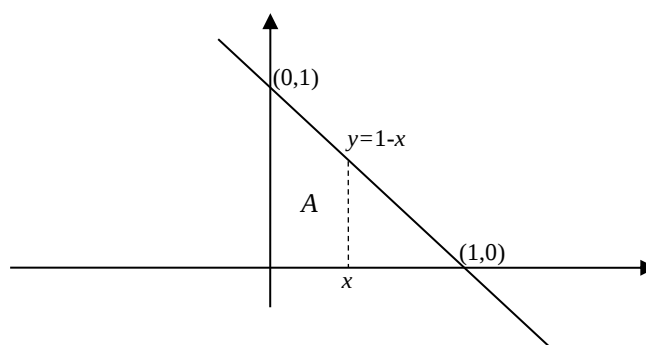
Do obliczenia całek wielokrotnych wykorzystamy twierdzenie Fubiniego – wzór (2), co sprowadzi obliczanie całki do dwóch całek funkcji jednej zmiennej (całki iterowane). W przypadku (i) mamy:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \iint_{[0, 1] \times [0, 1]} xy dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy dy \right) dx = \int_0^1 \left(x \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

W przypadku (ii) stosując (2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \iint_{\Omega} xy dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\Omega_x} xy dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy dy \right) dx = \int_0^1 \left(x \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{y=x^2}^{y=x} dx = \\ &= \int_0^1 x \frac{x^2 - x^4}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 - x^5 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{6} x^6 \right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Przykład 2. Obliczyć całkę podwójną $\iint_A (x^3 + y - 1) dx dy$, gdzie obszar całkowania A to trójkąt zdefiniowany następująco $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.



Korzystając ze wzoru na całki iterowane mamy

$$\begin{aligned} \iint_A (x^3 + y - 1) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{A_x} (x^3 + y - 1) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^3 + y - 1) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^3 y + \frac{1}{2} y^2 - y \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 x^3(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 - (1-x) dx = \int_0^1 \left(-x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{17}{60}. \end{aligned}$$

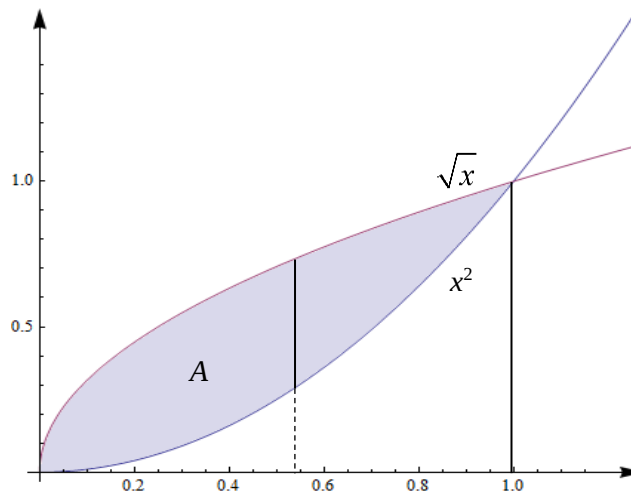
Przykład 3. Obliczyć całkę podwójną $\iint_A xy(x+y) dx dy$, gdzie obszar A jest ograniczony parabolami

$$y = x^2 \text{ i } x = y^2.$$

Obszar $A \subset \mathbb{R}^2$ jest określony następująco

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

który jest pokazany na **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania..** Widać, że możemy całkować przy ustalonym $x \in [0, 1]$ po $y \in [x^2, \sqrt{x}]$.



Rys. 2. Wykresy funkcji x^2 i $x^{1/2}$ na przedziale $[0, 1, 2]$.

Zatem całki iterowane mają postać

$$\begin{aligned} \iint_A xy(x+y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy(x+y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 y + xy^2) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^2 y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2 \sqrt{x}^2}{2} + \frac{x^2 \sqrt{x}^3}{3} \right) - \left(\frac{x^2 x^2}{2} + \frac{x^2 x^3}{3} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^{7/2}}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{3} \right) dx = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{7}{2}+1} - \frac{1}{10} - \frac{1}{18} = \frac{47}{1080} \approx 0,043518. \end{aligned}$$

Przykład 4. Niech $f :]0, 1[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x, y) = \frac{x-y}{|x-y|} x.$$

(Symbol $]a, b[$ oznacza odcinek otwarty, często oznaczany przez (a, b)). Obliczyć całkę

$$\int_{]0, 1[^2} f(x, y) dx dy.$$

Zbiór po którym całkujemy to $\Omega =]0, 1[^2 =]0, 1[\times]0, 1[$, czyli kwadrat jednostkowy otwarty (bez brzegu). Ale z punktu widzenia całki dwuwymiarowej nie ma znaczenia czy do zbioru, po którym całkujemy włączymy brzeg tego kwadratu czy nie. Dlatego tę samą wartość ma całka $\int_{[0, 1]^2} f(x, y) dx dy$.

Do obliczenia całki stosujemy całki iterowane:

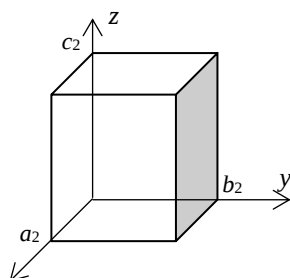
$$\int_{]0, 1[^2} f(x, y) dx dy = \int_{]0, 1[} \left(\int_{]0, 1[} \frac{x-y}{|x-y|} x dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x-y}{|x-y|} x dy + \int_x^1 \frac{x-y}{|x-y|} x dy \right) dx.$$

Zauważmy, że w całce $\int_0^x (x-y)/|x-y| dy$ jest $0 < y < x$, zatem $|x-y| = -(x-y)$. Natomiast w

całce $\int_x^1 (x-y)/|x-y| dy$: $x < y < 1$, zatem $|x-y| = -(x-y)$. Tak więc wyrażenie $(x-y)/|x-y|$ przyjmuje wartość -1 lub 1. Kontynuując powyższy rachunek:

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left(\int_0^x 1 \cdot x dy + \int_x^1 (-1) \cdot x dy \right) dx = \int_0^1 \left((x \cdot y) \Big|_{y=0}^{y=x} - (x \cdot y) \Big|_{y=x}^{y=1} \right) dx = \int_0^1 (x \cdot x - x \cdot 0 - (x \cdot 1 - x \cdot x)) dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x + x^2) dx = \int_0^1 (2x^2 - x) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Przykład 5. Obliczyć całkę potrójną $\int_{\Omega} x^n + y^n + z^n dx dy dz$, gdzie $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ jest prostopadłością w $\mathbb{R}^3$.



x

Całki potrójne możemy iterować podobnie jak całki podwójne. W tym przypadku mamy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x^n + y^n + z^n) dx dy dz &= \iiint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} (x^n + y^n + z^n) dx dy dz = \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} (x^n + y^n + z^n) dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\frac{b_1^{n+1} - a_1^{n+1}}{n+1} + (y^n + z^n)(b_1 - a_1) \right) dy \right) dz = \int_{a_3}^{b_3} \frac{b_1^{n+1} - a_1^{n+1}}{n+1} (b_2 - a_2) + \left(\frac{b_2^{n+1} - a_2^{n+1}}{n+1} + z^n (b_2 - a_2) \right) (b_1 - a_1) dz \\ &= \frac{b_1^{n+1} - a_1^{n+1}}{n+1} (b_2 - a_2) (b_3 - a_3) + \left(\frac{b_2^{n+1} - a_2^{n+1}}{n+1} (b_3 - a_3) + \frac{b_3^{n+1} - a_3^{n+1}}{n+1} (b_2 - a_2) \right) (b_1 - a_1) \\ &= \frac{(b_1^{n+1} - a_1^{n+1})(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) + (b_2^{n+1} - a_2^{n+1})(b_3 - a_3)(b_1 - a_1) + (b_3^{n+1} - a_3^{n+1})(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)}{n+1}. \end{aligned}$$

Przykład 6. Przyjmując, że w **Przykładzie 5** całkujemy po sześcianie $\Omega_b = [0, b] \times [0, b] \times [0, b]$ obliczyć jak zachowuje się granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_b} x^n + y^n + z^n dx dy dz$ w zależności od b ?

Wstawiamy do wyniku z **Przykładu 5** wartości $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $b_1 = b_2 = b_3 = b$ co daje

$$\int_{\Omega_b} x^n + y^n + z^n dx dy dz = \frac{(b^{n+1} - 0)(b - 0)(b - 0) + (b^{n+1} - 0)(b - 0)(b - 0) + (b^{n+1} - 0)(b - 0)(b - 0)}{n+1} = \frac{3b^{n+3}}{n+1}.$$

Mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_b} x^n + y^n + z^n dx dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3b^{n+3}}{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < b \leq 1, \\ \infty & \text{dla } 1 < b. \end{cases}$$

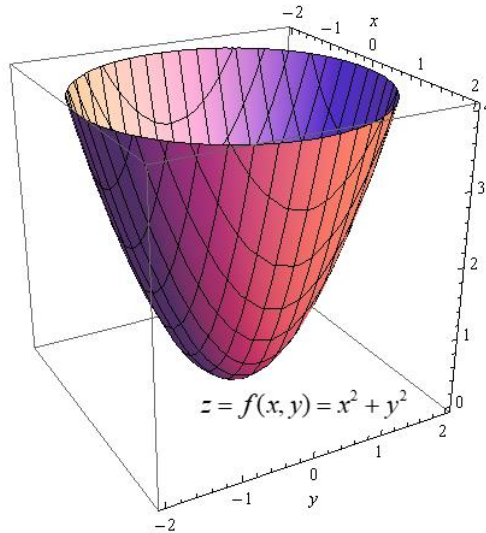
Wynik ten intuicyjnie jest zrozumiały. Gdy $0 < b \leq 1$, to w takim sześcianie $0 \leq x, y, z < 1$ (z wyjątkiem punktów na ścianach, ale stanowią one zbiór miary objętościowej zero), więc całkowane wyrażenie $x^n + y^n + z^n$ zmierza do zera dla $n \rightarrow \infty$ (poza punktami na ścianach), dlatego możemy spodziewać się, że całka też będzie zmierzać do zera. Gdy $b > 1$, to funkcja podcałkowa $x^n + y^n + z^n$, na przykład dla $1 < x \leq b$, będzie zmierzać do nieskończoności. W efekcie całość możemy spodziewać się, że całka też zmierza do ∞ dla $b > 1$.

Współrzędne biegunowe

Przy obliczaniu całek, pomocne bywa wykorzystanie specjalnej wersji zamiany zmiennych, czyli współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Jakobian transformacji dla tej zamiany zmiennych wynosi r , zatem mamy równość

$$\boxed{\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_b} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi,} \quad (3)$$

gdzie Ω_b jest zbiorem we współrzędnych (r, φ) , który odpowiada zbiorowi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.



Rys. 3 Wykres funkcji $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ nad kołem $x^2 + y^2 \leq 4$.

Przykład 7. Obliczyć całkę $\iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} x^2 + y^2 dx dy$. Z Rys. 3 widać, że całka ta przedstawia objętość figury ograniczonej z dołu kołem $x^2 + y^2 \leq R^2$, a z góry powierzchnią paraboloidy obrotowej $z = x^2 + y^2$. Aby obliczyć tę całkę zastosujemy współrzędne biegunowe i wzór (3). Mamy zatem

$$\begin{aligned} \iint_{K(R)} x^2 + y^2 dx dy &= \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} = \iint_{K(R)_b} (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 dr d\varphi = \iint_{K(R)_b} r^2 ((\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2) dr d\varphi \\ &= \iint_{K(R)_b} r^2 dr d\varphi, \end{aligned}$$

gdzie $K(R)_b$ jest kołem we współrzędnych biegunowych. Mamy więc dwa opisy tego samego zbioru, którym jest koło o środku $(0, 0)$ i promieniu R :

$$K(R) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\} \text{ – opis we współrzędnych prostokątnych,}$$

$$K(R)_b = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi\} \text{ – opis we współrzędnych biegunowych.}$$

Zatem

$$\iint_{K(R)} x^2 + y^2 dx dy = \iint_{K(R)_b} r^2 dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{3} r^3 \right) \Big|_{r=0}^{r=R} = \frac{2\pi}{3} R^3.$$

Przykład 8. Obliczyć całkę potrójną $\int_{\Omega} (x + y) dx dy dz$, gdzie Ω jest pierwszą ćwiartką górnej połówki kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ (wycinek kuli dla $x, y, z \geq 0$).

Zauważmy, że $\Omega_{(x,y)} = \{z \in \mathbb{R} : 0 \leq z < \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$ dla $(x, y) \in D$, gdzie D jest pierwszą ćwiartką koła na płaszczyźnie o promieniu 1 i środku $(0, 0)$. W rachunku wykorzystujemy w odpowiednim miejscu współrzędne biegunowe. Mamy zatem

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (x+y) dx dy dz &= \iiint_{\Omega} (x+y) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\Omega(x,y)} (x+y) dz \right) dx dy = \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x+y) dz \right) dx dy = \\
 \iint_D (x+y) z \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy &= \iint_D (x+y) \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \\ |J_{\Phi}(r, \varphi)| = r \end{array} \right| = \\
 \iint_{[0,1] \times [0, 2\pi]} (r \cos \varphi + r \sin \varphi) \sqrt{1-(r \cos \varphi)^2 - (r \sin \varphi)^2} r dr d\varphi &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 (\sin \varphi + \cos \varphi) \sqrt{1-r^2} dr d\varphi = \\
 \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr \int_0^{2\pi} (\sin \varphi + \cos \varphi) d\varphi &= \frac{1}{8} \left(r \sqrt{1-r^2} + (2r^2-1) \arcsin r \right) \Big|_0^1 (-\cos \varphi + \sin \varphi) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{16} \cdot 2 = \frac{\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

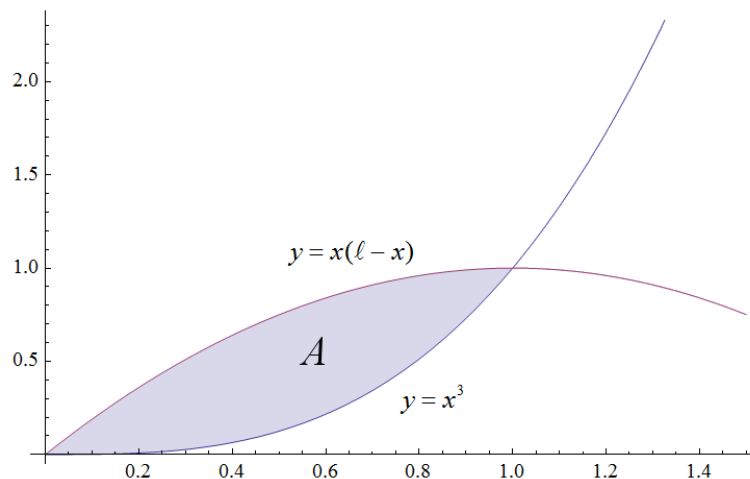
Pole zbioru mierzalnego $A \subset \mathbb{R}^2$ może być obliczone jako całka podwójna z funkcji $f(x, y) \equiv 1$. Miarę (pole) zbioru oznaczamy przez $|A|$. Mamy więc:

$$|A| = \iint_A 1 dx dy = \iint_A dx dy.$$

Przykład 9. Obliczyć pole obszaru płaskiego A ograniczonego krzywą $y = x^3$ i parabolą $y = x(\ell - x)$.

Wyznamy punkty przecięcia obu krzywych:

$$x^3 = x(\ell - x) \Rightarrow x = 0, x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \ell}.$$



Mamy więc $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \ell}, x^3 \leq y \leq x(\ell - x)\}$. Stąd

$$\begin{aligned}
 |A| &= \iint_A 1 dx dy = \int_0^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \ell}} \left(\int_{A_x} dy \right) dx = \int_0^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \ell}} \left(\int_{x(\ell-x)}^{x^3} dy \right) dx = \int_0^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \ell}} x^3 - x(\ell - x) dx = \\
 \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{\ell}{2} x^2 \right]_0^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \ell}} &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \ell} \right)^4 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \ell} \right)^3 - \frac{\ell}{2} \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \ell} \right)^2.
 \end{aligned}$$