

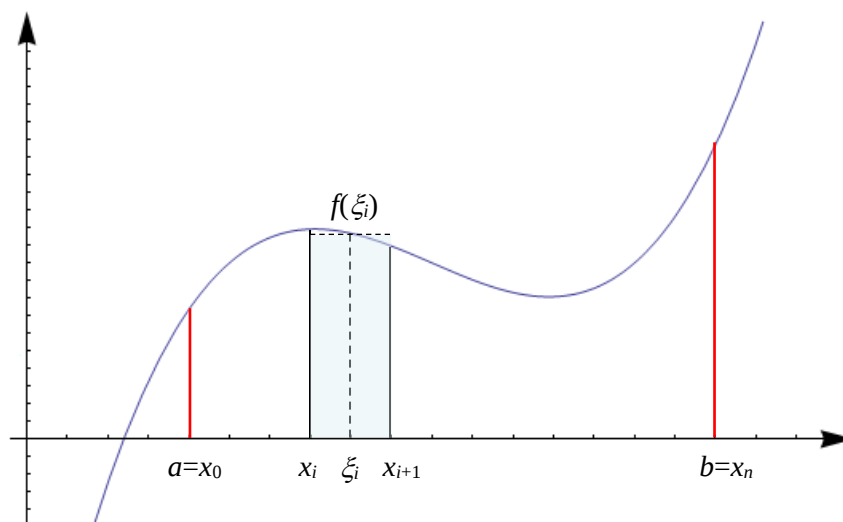
Całka oznaczona funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

Wstęp

W matematyce istnieje kilka definicji całki. Dla naszych potrzeb wystarczy jednak proste pojęcie całki, które pojawiło się w pracach Riemanna (1854), dlatego nazywa się ją *całką Riemanna*. Całka ta charakteryzuje się dość intuicyjną definicją (poprzez tzw. *sumy częściowe*) i ma oczywistą interpretację jako pole pod wykresem funkcji (Rys. 1):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(\xi_i^{(n)}) (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}).$$

Całka Riemanna jest określona poprawnie tylko dla funkcji ciągłych (ewentualnie posiadających dyskretny zbiór nieciągłości typu „skończony skok”). W przypadku funkcji jednej zmiennej ($x \in \mathbb{R}$) dziedziną całkowania będzie odcinek domknięty $[a, b]$. Uogólnienie na przypadek odcinka otwartego i/lub nieskończonego uzyskuje się przez odpowiednie przejście graniczne.



Rys. 1. Definicja całki Riemanna na odcinku $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Podstawowym twierdzeniem rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej, które łączy pochodną z całką oznaczoną jest:

TWIERDZENIE. Jeżeli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to dla całki Riemanna zachodzi następująca równość

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (1)$$

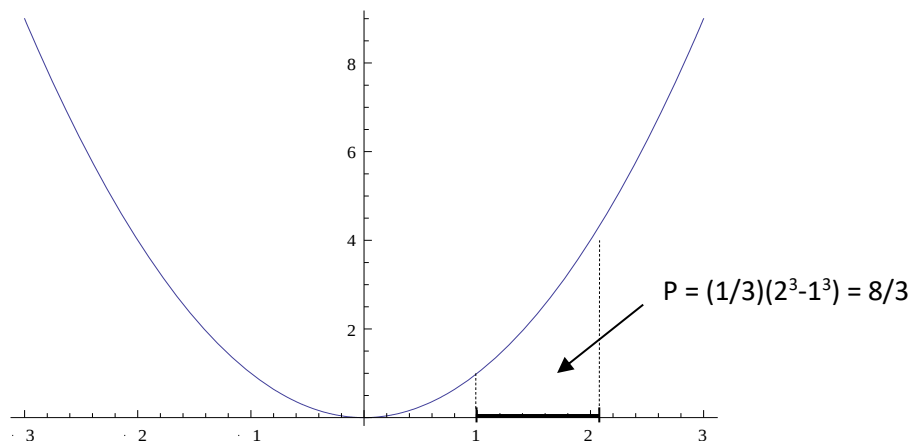
gdzie F jest dowolną pierwotną funkcji f , tzn. $F' = f$.

Różnicę $F(b) - F(a)$ zazwyczaj skracamy do symbolu $F \Big|_a^b$.

Zatem obliczanie całki oznaczonej funkcji ciągłej może być sprowadzone do znajdowania pierwotnej.
Na przykład

$$\int_a^b x^2 dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_a^b = \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} a^3 = \frac{b^3 - a^3}{3},$$

gdyż pierwotną dla x^2 jest $F(x) = \frac{1}{3} x^3$. Ponadto, ponieważ wykres funkcji x^2 nie ma fragmentów znajdujących się poniżej osi poziomej, więc powyższy wzór określa pole pomiędzy parabolą a dowolnym odcinkiem $[a, b] \subset \mathbb{R}$ leżącym na osi Ox (**Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.**).



Rys. 2. Pole pod wykresem paraboli $y=x^2$.

Zależność wyrażona we wzorze (1) jest tak ważna, że zapiszemy ją jeszcze raz w nieco zmienionej postaci, która znana jest jako **PODSTAWOWE TWIERDZENIE RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO** funkcji jednej zmiennej. Poniżej symbol $C([a, b])$ oznacza zbiór wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych określonych na odcinku $[a, b]$.

TWIERDZENIE. Niech $f \in C([a, b])$ oraz $F(x) = \int_a^x f(s) ds$ dla $x \in [a, b]$. Wtedy F jest różniczkowalna oraz

$$F'(x) = f(x) \text{ dla } x \in [a, b]. \quad (2)$$

Funkcję zdefiniowaną przez całkę po zmiennym obszarze $([a, x])$ tak, jak to jest w powyższym twierdzeniu, czyli $F(x) = \int_a^x f(s) ds$, określa się czasami jako „funkcję górnej granicy całkowania”.

Jeżeli na przykład zdefiniujemy funkcję wzorem

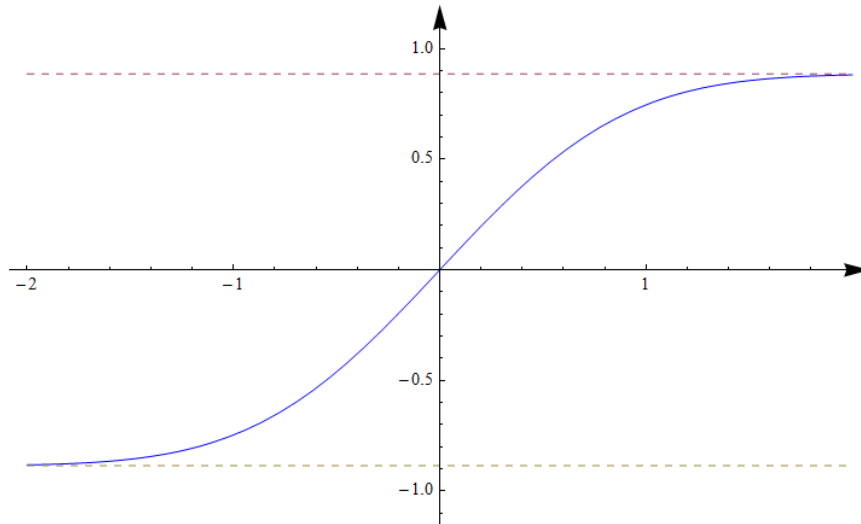
$$F(x) = \int_0^x e^{-s^2} ds, \quad (3)$$

to wzór ten poprawnie definiuje funkcję F dla każdego $x \in \mathbb{R}$. W zasadzie nie ma prostszego sposobu wyrażenia całki nieoznaczonej $\int e^{-s^2} ds$ (całka ta nie wyraża się w sposób skończony poprzez funkcje elementarne), ale nie znaczy to, że funkcja zdefiniowana wzorem (3) jest bardziej tajemnicza niż na przykład sinus lub jakiś wielomian. Możemy bardzo szczegółowo określić zachowanie się funkcji danej

wzorem (3). Znamy jej pochodną – co wynika ze wzoru (2): $F'(x) = e^{-x^2} > 0$. Ponieważ pochodna jest dodatnia, zatem funkcja F jest rosnąca w całej dziedzinie $(-\infty, +\infty)$. Druga pochodna

$$F''(x) = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$$

jest ujemna dla $x > 0$, dodatnia dla $x < 0$, równa zero dla $x = 0$. Tak więc druga pochodna zmienia znak w zerze, a to oznacza, że jest tam punkt przegięcia. Wykres funkcji F jest pokazany na rysunku.



Rys. 3. Wykres funkcji zdefiniowanej całką, $F(x) := \int_0^x e^{-s^2} ds$.

Jak widzimy z wykresu funkcja ma asymptoty poziome (dla $\pm\infty$), choć nie jest to oczywiste z samej definicji (3). Jedyne co na razie wiemy to, że funkcja jest rosnąca (ale może być na przykład $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$). Okazuje się, że jednak nasza funkcja ma skończoną granicę w nieskończoności, co wynika ze skończoności następującej całki

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (4)$$

Podobnie jak dla całki nieoznaczonej, tak samo dla całki oznaczonej istnieją wzory na całkowanie przez części oraz na zamianę zmiennej (całkowanie przez podstawienie).

CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI. Dane są funkcje $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalne w sposób ciągły (to znaczy $f, g \in C^1([a, b])$). Wtedy zachodzi równość

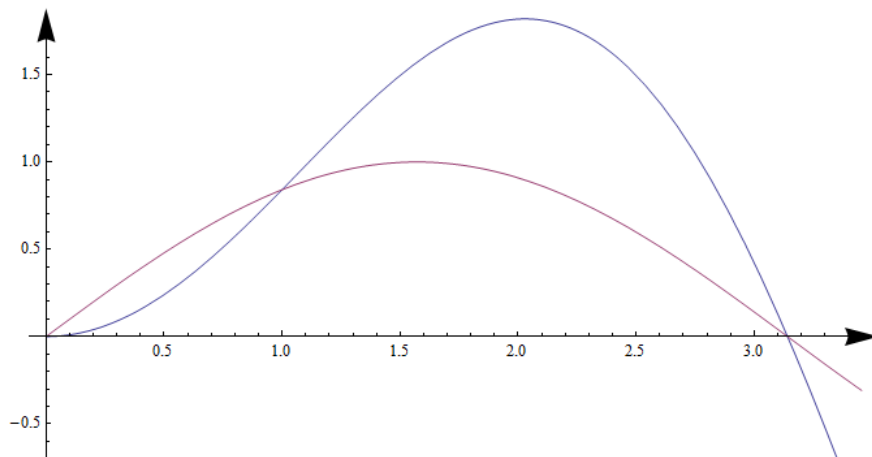
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \quad (5)$$

Na przykład

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x dx &= \int_0^{\pi} x(-\cos x)' dx = (-x \cos x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x'(-\cos x) dx = -(\pi \cos \pi - 0 \cos 0) + \underbrace{\int_0^{\pi} \cos x dx}_{=0} \\ &= -\pi(-1) + 0 = \pi. \end{aligned}$$

$$x \sin(x)$$

$$\sin(x)$$



Rys. 4. Wykresy funkcji $y = \sin(x)$ i $y = x \cdot \sin(x)$ na przedziale $[0; 1,1\pi]$.

Zatem pole pod wykresem funkcji $x \sin x$ na przedziale $[0, \pi]$ jest większe od pola pod wykresem funkcji $\sin x$: $\int_0^\pi x \sin x dx = \pi > \int_0^\pi \sin x dx = 2$. Zależność taką wyraźnie sugerują wykresy tych funkcji wykresach (**Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.**).

CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE (ZAMIANA ZMIENNYCH W CAŁCE)

Dana jest ciągła funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Niech $x = \varphi(t)$ będzie różniczkowalna w sposób ciągły. Wtedy zachodzi równość

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_a}^{t_b} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (6)$$

gdzie granice całkowania po nowej zmiennej t są wyznaczone z równości $a = \varphi(t_a)$, $b = \varphi(t_b)$.

Czasami zamiast podstawiania $x = \varphi(t)$ używamy $t = \psi(x)$. Ale to dalej sprowadzić można do pierwszego podstawienia, gdyż z równości $t = \psi(x)$ możemy wyliczyć $x = \psi^{-1}(t)$ (tutaj symbol ψ^{-1} oznacza funkcję odwrotną do ψ).

Na przykład

$$\begin{aligned} \int_2^3 x e^{-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} = \int_4^9 \frac{1}{2} e^{-t} dt = \frac{1}{2} (-e^{-t}) \Big|_4^9 = \frac{1}{2} (-e^{-9} - (-e^{-4})) \\ &= \frac{1}{2} (e^{-4} - e^{-9}) \approx 0,00909611. \end{aligned}$$

PRZYKŁADY

$$1) \int_1^2 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{4} \cdot 1^4 = 4 - \frac{1}{4} = 3,75.$$

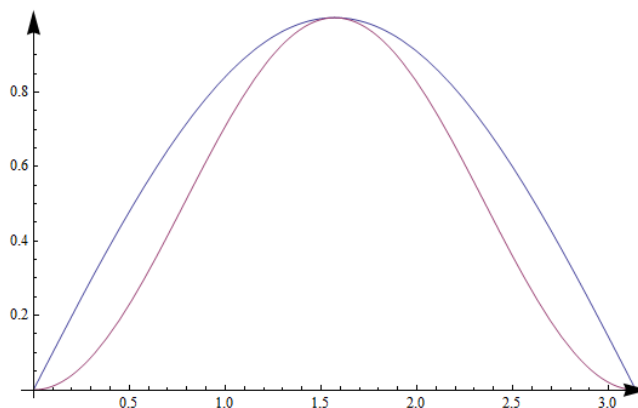
2) Jakie jest pole pod jednym łukiem funkcji sinus, a jakie pod sinus do kwadratu?

Całkujemy funkcję sinus na odcinku $[0, \pi]$:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

Całkujemy funkcję $\sin^2 x$ po odcinku $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



Rys. 5. Wykresy funkcji $\sin(x)$ i $\sin^2(x)$ na przedziale $[0, \pi]$.

3) Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$.

Funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną – ale już w postaci *ułamka prostego*. Jest tak dlatego, że wielomian, który jest w mianowniku nie jest już rozkładalny w zbiorze $\mathbb{R}$. Można to sprawdzić obliczając wyróżnik: $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 10 = 36 - 40 = -4 < 0$. Zapisujemy teraz wielomian tak, aby można było zastosować podstawienie sprowadzające go do postaci $t^2 + 1$.

$$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 + 10 - 3^2 = (x + 3)^2 + 1.$$

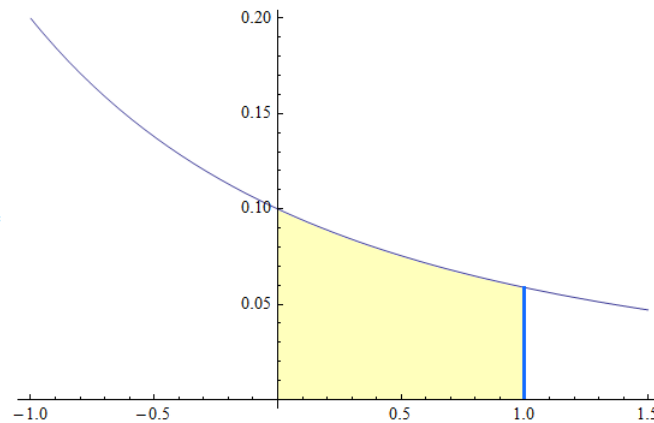
W tym przypadku podstawienie będzie bardzo proste: $t = x + 3$, zatem $dt = dx$. Liczymy

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 6x + 10} = \int_0^1 \frac{dx}{(x + 3)^2 + 1} = \int_3^4 \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctg t \Big|_3^4 = \arctg 4 - \arctg 3 \approx 0,07677.$$

Obliczona całka jest równa polu obszaru zaznaczonego na poniższym rysunku na żółto. Z rysunku widać, że dobrym przybliżeniem tego pola jest pole trapezu o wysokości $h = 1 - 0 = 1$ i podstawach

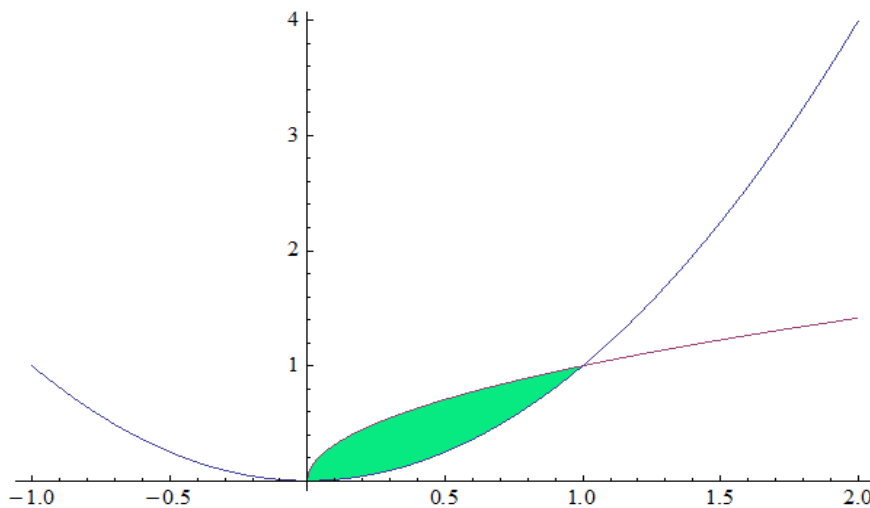
$$a = \frac{1}{x^2 + 6x + 10} \Big|_{x=0} = 0,1 \text{ oraz } b = \frac{1}{x^2 + 6x + 10} \Big|_{x=1} = \frac{1}{17},$$

zatem $h(a + b) / 2 = 1 \cdot (0,1 + 1/17) / 2 \approx 0,07941$ co jest niezłym przybliżeniem całki (0,07677).



4) Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi $y = x^2$, $x = y^2$.

Z określenia drugiej krzywej widać, że $x \geq 0$, zatem możemy to drugie równanie zapisać równoważnie jako $y = \sqrt{x}$. Poniżej są pokazane wykresy obu funkcji.



Punkty wspólne znajdujemy przyrównując do siebie obie funkcje, co daje równanie: $x^2 = \sqrt{x}$. Z tego równania mamy

$$x^4 = x \text{ czyli } x^4 - x = 0 \Rightarrow \\ x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ lub } x^3 = 1.$$

Jedynymi rozwiązaniami tego równania są $x = 0$ oraz $x = 1$. Oznacza to, że wykresy przecinają się tylko dla tych argumentów (co zresztą widać na rysunku). Tak więc pole zaznaczonego obszaru możemy obliczyć jako całkę z różnicy $\sqrt{x} - x^2$ na przedziale $[0, 1]$.

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2) dx = \left(\frac{1}{1+1/2} x^{1+1/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \\ = \left(\frac{2}{3} 1^{3/2} - \frac{1}{3} 1^3 \right) - \left(\frac{2}{3} 0^{3/2} - \frac{1}{3} 0^3 \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

5) Obliczyć pole koła przy pomocy całki oznaczonej.

Ogólne równanie okręgu na płaszczyźnie ma postać $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, gdzie x_0, y_0 to współrzędne środka, a $r > 0$ jest promieniem okręgu. Wystarczy jednak ograniczyć się do przypadku okręgu o środku $(0, 0)$: $x^2 + y^2 = r^2$. Z równania tego mamy $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, więc górna połówka koła zawarta jest pomiędzy odcinkiem $[-r, r]$ a wykresem funkcji $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Tak więc

$$P = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Stosujemy podstawienie $x = r \sin t$, skąd $dx = r \cos t dt$. Ponadto widać, że $x \in [-r, r] \Rightarrow t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mamy więc

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\ &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt. \end{aligned}$$

Teraz wykorzystujemy tożsamość

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

co po podstawieniu do całki daje

$$\begin{aligned} P &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = r^2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2t dt \right) = \pi r^2 + r^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \pi r^2 + r^2 \left(\frac{1}{2} \sin(\pi/2) - \frac{1}{2} \sin(-\pi/2) \right) = \pi r^2. \end{aligned}$$

6) Podać zależność redukcyjną dla całki $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ $n = 0, 1, 2, \dots$

Oznaczamy $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Oczywiście mamy

$$J_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0 x dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}, \quad J_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^1 x dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1. \quad (7)$$

Dla $n \geq 2$ całkujemy przez części

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x (\sin x)' dx = (\cos^{n-1} x \sin x) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\cos^{n-1} x)' \sin x dx \\ &= \cos^{n-1}(\pi/2) \sin(\pi/2) - \cos^{n-1}(0) \sin(0) - \int_0^{\pi/2} (\cos^{n-1} x)' \sin x dx = 0 - 0 - (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x (-\sin x) \sin x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n. \end{aligned}$$

Mamy więc równość $J_n = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n$, skąd $J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}$. Ostatecznie możemy to podsumować

$$\begin{cases} J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}, & n=2,3,\dots \\ J_0 = \frac{\pi}{2}, & J_1 = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Na przykład

$$\begin{aligned} J_4 &= \int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx = \frac{3}{4}J_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}J_0 = \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi, \\ J_5 &= \int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx = \frac{4}{5}J_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}J_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{15}, \\ J_7 &= \frac{6}{7}J_5 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}J_1 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{16}{35}. \end{aligned}$$

7) Jeżeli przesuwamy po linii prostej ciało działając siłą $F(x)$ od punktu $x = x_1$ do $x = x_2$, gdzie $x_1 < x_2$,

to praca wykonana przez tę siłę wynosi $W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$. Później zobaczymy, że jest to szczególny

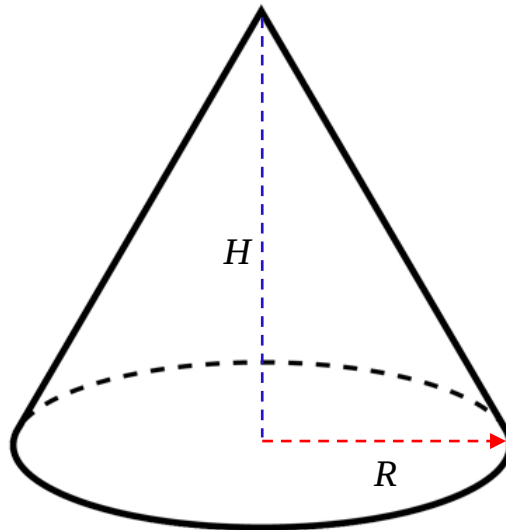
przypadek ogólnego wyrażenia na pracę $W = \oint_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$ gdzie $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ jest drogą, po której przemieszczało się ciało pod wpływem pola sił $\mathbf{F}$, a kropka $(\cdot)$ oznacza iloczyn skalarny wektorów.

Rozważmy pracę jaką wykonujemy ściskając lub rozciągając sprężynę od położenia równowagi. Przyjmijmy, że sprężyna spełnia prawo Hooke'a i rozciągnięta została o długość ℓ . Dla takiej sprężyny mamy $F(x) = -kx$, gdzie $k > 0$ jest jej sztywnością. Siła którą przykładamy jest przeciwnego znaku, czyli wynosi ona kx . Zatem

$$W = \int_0^{\ell} kx dx = k \int_0^{\ell} x dx = k \left. \frac{1}{2}x^2 \right|_0^{\ell} = \frac{1}{2}k\ell^2. \quad (9)$$

Możemy ten wynik też zinterpretować następująco: w sprężynie została zgromadzona energia (potencjalna) równa $\frac{1}{2}k\ell^2$.

8) Obliczyć objętość stożka o wysokości H i promieniu podstawy R .



Obliczenie objętości brył trójwymiarowych w ogólności wymaga użycia całek objętościowych. Często jednak (zwłaszcza, gdy bryła posiada jakąś symetrię) można uzyskać objętość wykonując tylko całkowanie funkcji jednej zmiennej. W przypadku stożka zauważamy, że na wysokości h przekrój poprzeczny jest kołem o promieniu

$$r = R(1 - h / H),$$

co wynika z twierdzenia Talesa. Objętość „plasterka” o podstawie r i wysokości dh wynosi

$$dV = 2\pi r^2 dh.$$

Całkujemy teraz te elementarne objętości po $h \in [0, H]$ i korzystamy z wyrażenia na h aby uzyskać pełną objętość

$$\begin{aligned} V &= \int_0^H dV = \int_0^H 2\pi r^2 dh = \int_0^H 2\pi (R(1 - h / H))^2 dh = 2\pi R^2 \int_0^H (1 - h / H)^2 dh = \left\{ \begin{array}{l} s = 1 - h / H \\ ds = -dh / H \end{array} \right\} \\ &= 2\pi R^2 \int_1^0 s^2 (-H ds) = -2\pi R^2 H \int_1^0 s^2 ds = 2\pi R^2 H \int_0^1 s^2 ds = 2\pi R^2 H \left[\frac{1}{3} s^3 \right]_0^1 = 2\pi R^2 H \left[\frac{1}{3} - 0 \right] \quad (10) \\ &= \frac{1}{3} 2\pi R^2 H. \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy znany wynik: **objętość stożka = (1/3) · (pole podstawy) · (wysokość)**.