

DEFINICJA. Funkcją pierwotną (lub całką nieoznaczoną) funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ określonej na zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}$ nazywamy dowolną funkcję różniczkowalną $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $F' = f$.

Oznacza to, że pierwotna (cała nieoznaczona) spełnia warunek:

$$\forall x \in D \text{ zachodzi } F'(x) = f(x). \quad (1)$$

Pierwotną funkcji f oznaczamy symbolem $\int f(x)dx$.

Na przykład dla $f(x) = x^2$ funkcją pierwotną jest $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, ponieważ

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x).$$

Ale pierwotną też jest funkcja $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 7$, czy $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$. Dlatego wynik najczęściej zapisujemy tak

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą.

Można udowodnić następujące fakty:

- 1) Jeżeli $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to posiada pierwotną.
- 2) Jeżeli dziedzina D funkcji jest odcinkiem, to dowolne dwie pierwotne F_1, F_2 funkcji f różnią się o pewną stałą: $F_1(x) - F_2(x) = C$ dla $x \in D$.

WZÓR NA CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

Dane są dwie funkcje f, g , o których zakładamy, że posiadają ciągłe pochodne. Wtedy zachodzi następująca równość

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \quad (2)$$

Wzór ten umożliwia czasami obliczenie całki nieoznaczonej poprzez sprowadzenie jej do innej postaci.

PRZYKŁADY

1) Skorzystamy z pochodnej funkcji e^x : $(e^x)' = e^x$ oraz z tego, że $x' = 1$, aby obliczyć $\int xe^x dx$:

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= \int x(e^x)' dx = xe^x - \int x'e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = \\ &= (x-1)e^x + C. \end{aligned}$$

2) $\int \ln x dx$

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int x' \ln x dx = x \ln x - \int x(\ln x)' dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = \\ &= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.\end{aligned}$$

3) $\int x \sin x dx$

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= \int x(-\cos x)' dx = x(-\cos x) - \int x'(-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= \int x(\sin x)' dx = x \sin x - \int x' \sin x dx \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

4) $\int x^2 \sin x dx$

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x dx &= \int x^2(-\cos x)' dx = x^2(-\cos x) - \int (x^2)'(-\cos x) dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.\end{aligned}$$

5) $\int x^2 \cos x dx$

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= \int x^2(\sin x)' dx = x^2 \sin x - \int (x^2)' \sin x dx = \\ &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + C \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.\end{aligned}$$

6) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \\ &= \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \arctg x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.\end{aligned}$$

Musimy teraz obliczyć całkę $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$. W tym celu wykorzystamy całkowanie przez części:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx &= \int x \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \int x \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right)' dx = -\frac{x}{2(1+x^2)} - \int x' \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctg x + C.\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \operatorname{arctg} x - \left(-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C.$$

CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE (CAŁKOWANIE PRZEZ ZAMIANĘ ZMIENNEJ)

W niektórych przypadkach obliczenie całki $\int f(x)dx$ może się uprościć, gdy wprowadzimy pomocniczą zmienną, tzn. zastosujemy podstawienie $x = \varphi(t)$ (lub $t = \varphi(x)$). Stosując formalny rachunek, $dx = \varphi'(t)dt$, mamy następującą równość na całkowanie przez zamianę zmiennej

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,} \quad (3)$$

gdzie po obliczeniu całki występującej po prawej stronie, która będzie funkcją zmiennej t , podstawiamy zmienną x wyliczoną z zależności $x = \varphi(t)$.

PRZYKŁADY

1) Obliczyć przez podstawienie całkę $\int xe^{-x^2} dx$.

Zastosujemy podstawienie $t = x^2$. (Można też patrzeć na tę zamianę zmiennej jak na podstawienie $x = \sqrt{t}$. Oba podejścia dają oczywiście ten sam rezultat końcowy.) Obliczamy

$$dt = (x^2)'dx = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} dt = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt.$$

Mamy teraz

$$\int xe^{-x^2} dx = \int xe^{-t} \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int e^{-t} dt = \frac{1}{2} (-e^{-t}) + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

2) Obliczyć całkę $\int (2+x^5)^3 x^4 dx$.

Stosujemy podstawienie $2+x^5 = t$. Mamy $dt = d(2+x^5) = 5x^4 dx$, zatem

$$\int (2+x^5)^3 x^4 dx = \int t^3 \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int t^3 dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{20} (2+x^5)^4 + C.$$

3) Obliczyć całkę $\int \operatorname{tg} x dx$.

Wykorzystamy równość $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ oraz podstawienie $t = \cos x$. Mamy

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = \int \frac{-dt}{t} = -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C.$$

4) Obliczyć całkę $\int \frac{1}{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}} dx$, gdzie α jest dowolną stałą.

Można tę całkę obliczyć następująco:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}} dx &= \int \frac{e^{\alpha x}}{(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})e^{\alpha x}} dx = \int \frac{e^{\alpha x}}{e^{2\alpha x} + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = e^{\alpha x} \\ dt = \alpha e^{\alpha x} dx \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{\alpha} dt}{t^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \arctg t + C = \frac{1}{\alpha} \arctg e^{\alpha x} + C.\end{aligned}$$

5) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$. Obliczenie tej całki sprowadza się do znanej całki $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$. Ta druga całka wynika oczywiście z pochodnej funkcji *arcus tangens*: $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Całkę przekształcamy tak $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{dx}{a^2 \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right)} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1}$ i stosujemy podstawienie $t = x/a$.

Ponieważ $dx = a dt$, więc

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{a} \arctg t = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C.$$

6) Sprawdzić przez różniczkowanie, że

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right| + C. \quad (4)$$

Niech $x \in (0, \pi/2)$. Wtedy funkcja $1/\sin x$ jest określona na odcinku tym odcinku oraz $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x > 0$, zatem możemy opuścić wartość bezwzględną we wzorze (4), zatem mamy pokazać, że

$$\frac{d}{dx} \ln(\operatorname{tg} \frac{1}{2} x) = \frac{1}{\sin x}.$$

Pamiętając o pochodnej funkcji złożonej oraz że $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \ln(\operatorname{tg} \frac{1}{2} x) &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x} \frac{1}{(\cos \frac{1}{2} x)^2} \left(\frac{1}{2} x \right)' = \frac{1}{\frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} (\cos \frac{1}{2} x)^2} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \frac{1}{\sin x}.\end{aligned}$$

7) Niech $k \neq 0$. Pokazać, że

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + C.$$

Należy po prostu zróżniczkować prawą stronę i pokazać, że jest ona równa $\frac{1}{\sqrt{x^2 + k}}$. Korzystamy przy tym z równości:

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad \text{dla } x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty). \quad (5)$$

Obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + k}} \frac{d}{dx} (x + \sqrt{x^2 + k}) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + k}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + k}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + k}} \frac{\sqrt{x^2 + k} + x}{\sqrt{x^2 + k}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}}. \end{aligned}$$

8) Sprawdzić przez różniczkowanie wzór na całkę $\int \sqrt{x^2 + k} \, dx$, gdzie $k \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą:

$$\int \sqrt{x^2 + k} \, dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + k} + k \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| \right) + C. \quad (6)$$

9) Sprawdzić przez różniczkowanie wzór na całkę $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} \, dx$, gdzie $k \neq 0$ jest ustalonym parametrem:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} \, dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + C. \quad (7)$$