

Zadanie 1. Obliczyć pochodne funkcji:

(a) $f(x) = e^{\sqrt{\sin x} + 2 \cos(x^3)}$; (b) $f(x) = \frac{x^3}{e^{3x} - 1}$; (c) $f(t) = t^n e^{-\frac{a}{t}}$; (d) $f(T) = T^2 \exp(-\frac{E_a}{T})$.

Zadanie 2. Obliczyć granice funkcji:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 - \sin x}{x^5}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3 \cos x}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$; (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$; (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-\sqrt{x}}$.

Zadanie 3. (a) Obliczyć wartość pochodnej $R_p = \left(\frac{dE}{dj} \right)_{E_{eq}}$, gdy gęstość prądu elektrodowego j dana jest równaniem Butlera–Volmera

$$j(E) = j^0 \left(e^{\frac{F\alpha_a}{RT}(E-E_{eq})} - e^{-\frac{F\alpha_c}{RT}(E-E_{eq})} \right),$$

gdzie E jest potencjałem elektrycznym elektrody, T jest temperaturą bezwzględną układu, F i R to stała Faradaya i uniwersalna stała gazowa, α_a i α_c to tzw. współczynniki przeniesienia elektronu (anodowy i katodowy). Uwaga: w elektrochemii gęstość prądu często oznaczana jest również symbolem „ i ”. (b) Naskicować wykres funkcji $j(E)$.

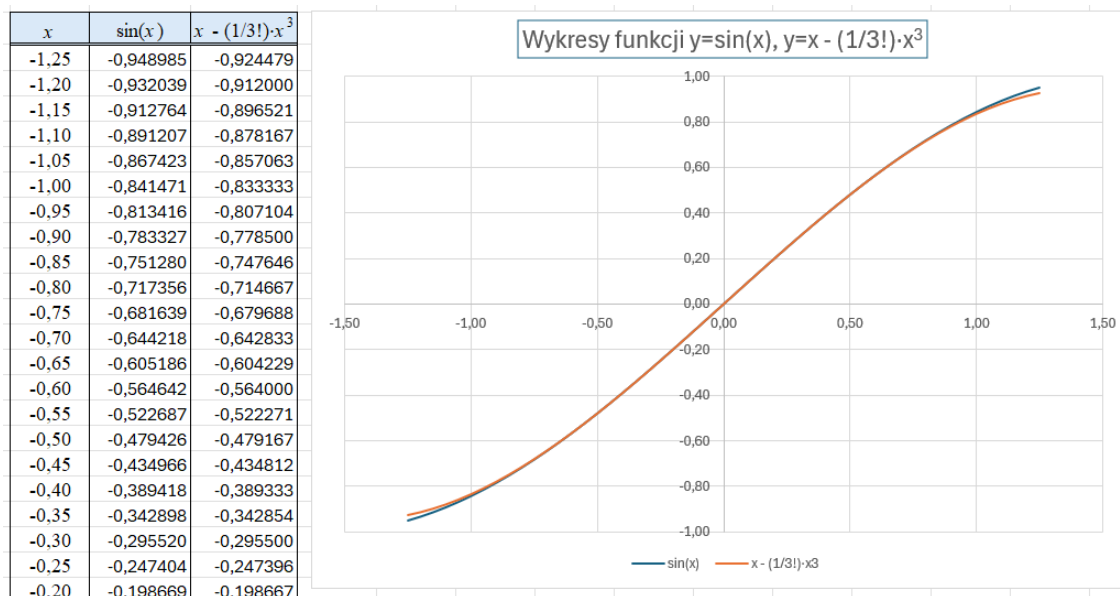
Zadanie 4. Znaleźć rozwinięcia w szereg Taylora podanych funkcji.

(a) $f(x) = \sqrt{1+x}$ dla $x_0 = 0$, $n = 5$.

(b) $f(x) = (1+x)^\alpha$ dla $x_0 = 0$, $n = 5$, gdzie $\alpha > 0$ jest daną ustaloną liczbą.

(c) $f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$ dla $x_0 = 0$, $n = 4$.

Zadanie 5. Poniżej na rysunku są pokazane wykresy funkcji $y = \sin x$ oraz $y = x - (1/3!)x^3$ na przedziale $[-1,25; 1,25]$. Druga funkcja jest przybliżeniem Taylora funkcji sinus. Rozwinięcie jest do trzeciego rzędu wokół punktu $x_0 = 0$. Obliczenia i wykres są wykonane w programie Excel.



Należy sporządzić podobny wykres dla funkcji $y = \operatorname{tg} x$ na przedziale $[-1; 1]$.

Zadanie 6. Używając rozwinięcia w szereg Taylora obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - x \sin x - 3}{x(\sin x - \operatorname{tg} x)}$.

Zadanie 7. Prawo Plancka podaje wyrażenie na rozkład widmowy promieniowanie ciała doskonale czarnego w całym zakresie częstotliwości (lub długości fal)

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (1)$$

gdzie ν to częstotliwość promieniowania, a T to temperatura ciała w K, h i c to stała Plancka i prędkość światła w próżni. Oblicz $\lim_{\nu \rightarrow 0} I(\nu, T)$ i $\lim_{\nu \rightarrow \infty} I(\nu, T)$. Zbadać przebieg zmienności funkcji $[0, \infty) \ni \nu \mapsto I(\nu, T) \in [0, \infty)$. Znajdź częstotliwość, dla której I jest największe. Jak wartość tej częstotliwości zależy od T ?

Zadanie 7. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i narysować ich wykresy.

(a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

(b) $f(x) = xe^{-x}$

(c) $f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$

(d) $f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$