

Równania różniczkowe zwyczajne liniowe rzędu drugiego

Równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym drugiego rzędu nazywamy równanie postaci

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \quad (1)$$

gdzie $p(t)$, $q(t)$, $f(t)$ są danymi funkcjami. Równanie to, uzupełnione warunkami początkowymi

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad (2)$$

tworzy zagadnienie początkowe (zagadnienie Cauchy'ego). Zauważmy, że w tym przypadku są dwa warunki początkowe (2): dla funkcji niewiadomej ($y(t_0) = y_0$) oraz dla jej pochodnej ($y'(t_0) = y_1$). Jest to związane z faktem, że równanie (1) jest drugiego rzędu.

Gdy w równaniu (1) funkcja $f(t) = 0$, to równanie takie nazywamy *jednorodnym*. Gdy natomiast $f(t) \neq 0$, to równanie nazywamy *niejednorodnym*.

Równania liniowe rzędu drugiego stałych współczynników

Szczególnym przypadkiem jest sytuacja, gdy współczynniki równania (1) są stałe

$$ay'' + by' + cy = f(t) \quad (3)$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$. Zauważmy, że stałość współczynników dotyczy tylko współczynników przy funkcji niewiadomej i jej pochodnych. Aby rozwiązać równanie (3) najpierw rozwiązujemy wersję jednorodną, tzn. pomijamy $f(t)$:

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (4)$$

Równanie jednorodne (zero po prawej stronie) (4), ma własność liniowości w następującym sensie: jeżeli y_1, y_2 są dowolnymi rozwiązaniami tego równania, to każda suma $y_1 + y_2$ oraz iloczyn przez stałą Cy_1 są także rozwiązaniami. Można to wyrazić jedną własnością: kombinacja liniowa $C_1y_1 + C_2y_2$, gdzie C_1, C_2 są stałymi, też jest rozwiązaniem. Łatwo to sprawdzić:

$$\left. \begin{array}{l} ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \\ ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{dodajemy stronami}} a(y_1'' + y_2'') + b(y_1' + y_2') + c(y_1 + y_2) = 0 \\ \Rightarrow a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) = 0.$$

Jeżeli $ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0$, to

$$C(ay_1'' + by_1' + cy_1) = 0 \Rightarrow aCy_1'' + bCy_1' + cCy_1 = 0 \Rightarrow a(Cy_1)'' + b(Cy_1)' + c(Cy_1) = 0,$$

zatem Cy_1 też jest rozwiązaniem. Podsumowując: $a(C_1y_1 + C_2y_2)'' + b(C_1y_1 + C_2y_2)' + c(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$.

Zatem jeśli y_1, y_2 spełniają równanie (3), to funkcja $C_1y_1 + C_2y_2$ też je spełnia.

Równanie jednorodne. W przypadku, gdy w równaniu (1) po prawej stronie $f(t) = 0$, jak już wiemy równanie nazywamy jednorodnym, czyli ma postać równania (4). Rozwiązania takiego równania szukamy w postaci wykładniczej

$$y(t) = e^{\lambda t}, \quad (5)$$

gdzie λ jest nieznanym parametrem, który może być też liczbą zespoloną. Zatem w ogólności $\lambda \in \mathbb{C}$.

Po wstawieniu funkcji (5) do równania (3) i skorzystaniu ze równości $y' = \lambda e^{\lambda t}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} &= 0, \\ (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t} &= 0. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że parametr λ musi spełniać równanie algebraiczne:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (6)$$

Równanie (6) nazywamy *równaniem charakterystycznym* dla równania różniczkowego (3). Jak wiadomo liczba pierwiastków równania (6) oraz ich typ zależą od znaku wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$. Mamy trzy przypadki.

1. Przypadek $\Delta > 0$. Istnieją dwa pierwiastki rzeczywiste

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}. \quad (7)$$

Wtedy rozwiązanie ogólne równanie (4) ma postać

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (8)$$

2. Przypadek $\Delta = 0$. Teraz równanie charakterystyczne posiada tylko jeden pierwiastek

$$\lambda_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Istnieje więc w tym przypadku tylko jedno rozwiązanie postaci (5): $y_1(t) = e^{\lambda_0 t}$. Okazuje się, że drugie niezależne rozwiązanie ma postać $y_2(t) = te^{\lambda_0 t}$, co można sprawdzić przez bezpośredni rachunek:

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= \\ a(2\lambda_0 e^{\lambda_0 t} + t\lambda_0^2 e^{\lambda_0 t}) + b(e^{\lambda_0 t} + t\lambda_0 e^{\lambda_0 t}) + cte^{\lambda_0 t} &= (a(2\lambda_0 + t\lambda_0^2) + b(1 + t\lambda_0) + ct)e^{\lambda_0 t} = \\ \underbrace{(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c)}_{=0} te^{\lambda_0 t} + (2a\lambda_0 + b)e^{\lambda_0 t} &= 0 + \left(2a \cdot \frac{-b}{2a} + b\right) e^{\lambda_0 t} = 0. \end{aligned}$$

W rachunku skorzystaliśmy z tego, że λ_0 jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego (6), zatem $a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c = 0$. Rozwiązanie ogólne jest zatem w tym przypadku następujące

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_0 t} + C_2 te^{\lambda_0 t} = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_0 t}. \quad (9)$$

3. Przypadek $\Delta < 0$. W tym przypadku pierwiastki wielomianu charakterystycznego są liczbami zespolonymi o części urojonej niezerowej. Dla $\Delta < 0$ mamy $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-|\Delta|} = i\sqrt{|\Delta|} \in \mathbb{C}$. W szczególności (wystarczy rozważać tylko jeden pierwiastek zespolony, gdyż drugi jest do niego sprzężony, bo współczynniki równania charakterystycznego były rzeczywiste)

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \alpha + i\beta, \\ \alpha &= -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}.\end{aligned}\tag{10}$$

Wyrażenie $e^{\lambda t}$ możemy rozpisać tak

$$e^{\lambda t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t).$$

Stąd można wywnioskować, że część rzeczywista, $e^{\alpha t} \cos \beta t$, oraz część urojona, $e^{\alpha t} \sin \beta t$, są dwoma niezależnymi rozwiązaniami równania (3). Tak więc ogólne rozwiązanie jest ich kombinacją liniową

$$y(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t),\tag{11}$$

gdzie $\alpha = -b / 2a$, $\beta = \sqrt{|\Delta|} / 2a$.

Przykład 1. Podać rozwiązanie ogólne równania

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

Wielomian charakterystyczny ma postać

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0.$$

Wyróżnik $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1 = 4 + 12 = 16 > 0$. Jest on dodatni, więc są dwa pierwiastki dane wzorami (7).

Jest to **Przypadek 1**. Zatem

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -3,$$

a więc rozwiązanie ogólne równania ma postać

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}.$$

Przykład 2. Znajdziemy rozwiązanie ogólne równania

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Wielomian charakterystyczny ma postać

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0.$$

Ponieważ $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$, więc mamy jeden pierwiastek $\lambda = -\frac{6}{2} = -3$. Jest to **Przypadek 2**.

Rozwiązanie ogólne jest w tym przypadku kombinacją dwóch funkcji: e^{-3t} oraz te^{-3t} , tak więc

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-3t}.$$

Przykład 3. Podać rozwiązanie ogólne równania

$$y'' + y' + y = 0.$$

Wielomian charakterystyczny $\lambda^2 + \lambda + 1$ ma wyróżnik $\Delta = 1^2 - 4 = -3$ ujemny. Jest to **Przypadek 3**. Zgodnie ze wzorami (10) otrzymujemy

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

więc rozwiązanie ogólne wyrażone wzorem (11) ma w tym wypadku postać

$$y(t) = e^{-t/2} (C_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t).$$

Przykład 4. Podaj rozwiązanie problemu początkowego dla funkcji $y = y(x)$

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2.$$

W tym przypadku równanie charakterystyczne (6) ma postać $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, czyli $(\lambda + 1)^2 = 0$. Stąd jedynym pierwiastkiem jest $\lambda_1 = -1$ (jest to pierwiastek podwójny). Oznacza to, że mamy następujące dwa niezależne rozwiązania e^{-x} oraz xe^{-x} , skąd ogólne rozwiązanie ma postać

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}. \quad (12)$$

Teraz wyznaczamy stałe C_1 i C_2 z warunków początkowych. Obliczmy najpierw pochodną

$$\begin{aligned} y'(x) &= ((C_1 + C_2 x)e^{-x})' = (C_1 + C_2 x)'e^{-x} + (C_1 + C_2 x)(e^{-x})' = C_2 e^{-x} + (C_1 + C_2 x)(-e^{-x}) = \\ &= (C_2 - C_1 - C_2 x)e^{-x} = (-C_1 + (1 - x)C_2)e^{-x}. \end{aligned}$$

Teraz wstawiamy warunki początkowe:

$$\begin{aligned} y(0) = -1 &\Rightarrow (C_1 + C_2 \cdot 0)e^{-0} = -1, \\ y'(0) = 2 &\Rightarrow (-C_1 + (1 - 0)C_2)e^{-0} = 2, \end{aligned}$$

czyli liniowy układ równań na stałe C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = -1, \\ -C_1 + C_2 = 2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest $C_1 = -1, C_2 = 1$. Podstawimy do ogólnego rozwiązania (12), co daje funkcję

$$y(x) = (-1 + x)e^{-x}.$$

Równanie niejednorodne. Teraz przejdziemy do rozwiązywania równań niejednorodnych (liniowych drugiego rzędu o stałych współczynnikach), czyli równań postaci

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad (13)$$

gdzie f jest daną funkcją. Można udowodnić, że rozwiązanie ogólne równania (13) jest sumą dwóch składników: (i) rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (czyli równania, w którym $f(x) = 0$), (*RORJ*) oraz (ii) dowolnego rozwiązania równania niejednorodnego, y_{sz} . Zatem

$$y(x) = \underbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}_{RORJ} + \underbrace{y_{sz}(x)}_{\text{rozwiązanie szczególne}}, \quad (14)$$

gdzie $y_1(x), y_2(x)$ są niezależnymi rozwiązaniami równania jednorodnego (4), a $y_{sz}(x)$ jest jakimkolwiek (tzw. *szczególnym*) rozwiązaniem pełnego równania niejednorodnego (13).

Jednym ze sposobów poszukiwania szczególnego rozwiązania równania (13) jest metoda uzmienniana stałych – podobna do analogicznej metody dla równania liniowego pierwszego rzędu o dowolnych (niekoniecznie stałych) współczynnikach. Jednak w przypadku równania (1) na ogół prowadzi ona do dość skomplikowanych rachunków. Z drugiej strony dla pewnych typowych funkcjach $f(x)$ rozwiązanie szczególne można stosunkowo łatwo znaleźć lub nawet odgadnąć. Dalej są omówione takie typowe przypadki.

Prawa strona jest wielomianem: $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

Mamy więc równanie

$$ay'' + by' + cy = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad (15)$$

czyli

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

w którym po prawej stronie występuje wielomian.

Łatwo się domyślić, że w tym przypadku rozwiązanie szczególne może być wielomianem (na ogół stopnia n). Szukamy więc rozwiązania szczególnego w postaci wielomianu

$$y_{sz}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n, \quad (16)$$

o nieznanym na razie współczynnikach $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Podstawiamy więc powyższą funkcję do (15), co daje

$$\begin{aligned} & a(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n)'' + b(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n)' + c(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \\ & a(2\alpha_2 + 6\alpha_3 x + \dots + n(n-1)\alpha_n x^{n-2}) + b(\alpha_1 + 2\alpha_2 x + \dots + n\alpha_n x^{n-1}) + c(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n) = \\ & = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n. \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach x otrzymamy układ równań liniowych (pamiętajmy, że a, b, c są dane):

$$\begin{aligned} c\alpha_n &= a_n, \\ c\alpha_{n-1} + bn\alpha_n &= a_{n-1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

który można rozwiązać bez problemu pod warunkiem, że $c \neq 0$. Natomiast gdy $c = 0$, to szukamy rozwiązania w nieco zmienionej postaci

$$y_{sz}(x) = x(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n). \quad (17)$$

Oznacza to, że jeżeli $c = 0$, to rozwiązania szczególnego szukamy w postaci wielomianu stopnia o jeden większego oraz z wyrazem wolnym zerowym: $y_{sz}(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 x^2 + \dots + \alpha_n x^{n+1}$.

Przykład 5. Znaleźć szczególne rozwiązanie równania

$$y'' - 2y' + y = x^2. \quad (18)$$

Jest to równanie postaci (15) i współczynniki $c = 1 \neq 0$, dlatego rozwiązania szczególnego szukamy w postaci (16), tzn. wielomian takiego samego stopnia jaki występuje w równaniu:

$$y_{sz}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2.$$

Zanim wstawimy tę funkcję do równania (18) policzmy pochodne:

$$y_{sz}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2, \quad y'_{sz}(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x, \quad y''_{sz}(x) = 2\alpha_2.$$

Wstawiamy do (18) co daje

$$\begin{aligned} (2\alpha_2) - 2(\alpha_1 + 2\alpha_2 x) + (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) &= x^2, \\ \alpha_2 x^2 + (\alpha_1 - 4\alpha_2)x + (\alpha_0 + 2\alpha_2) &= x^2, \end{aligned}$$

skąd po porównaniu współczynników obu wielomianów mamy

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 - 4\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_0 + 2\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_0 = -2, \alpha_1 = 4, \alpha_2 = 1.$$

Tak więc rozwiązanie szczególne ma postać

$$y_{sz}(x) = -2 + 4x + x^2.$$

Jednorodna część równania (18), to jest równanie $y'' - 2y' = 0$ ma równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, skąd $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego to $C_1 + C_2 e^{2x}$. Tak więc ogólne rozwiązanie pełnego równania niejednorodnego ma postać:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + x^2 + 4x - 2.$$

Przykład 6. Znaleźć szczególne rozwiązanie równania

$$y'' - 2y' = 1 + x^2. \quad (19)$$

Ten problem jest podobny do poprzedniego, ale tym razem $c = 0$. Zatem szukamy szczególnego rozwiązania w postaci (17)

$$y_{sz}(x) = x(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) = \alpha_0 x + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 \quad (20)$$

Po wstawieniu do (19) mamy

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 6\alpha_2 x - 2(\alpha_0 + 2\alpha_1 x + 3\alpha_2 x^2) &= 1 + x^2, \\ -6\alpha_2 x^2 + (6\alpha_2 - 4\alpha_1)x + 2\alpha_1 - 2\alpha_0 &= 1 + x^2, \end{aligned}$$

skąd

$$\left. \begin{aligned} -6\alpha_2 &= 1 \\ 6\alpha_2 - 4\alpha_1 &= 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_0 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_0 = -\frac{3}{2}, \alpha_1 = -\frac{1}{4}, \alpha_2 = -\frac{1}{6}.$$

Tak więc rozwiązanie szczególne

$$y_{sz}(x) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}x^2.$$

Prawa strona jest iloczynem wielomianu i funkcja wykładniczej: $f(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)e^{\gamma x}$.

Jest to funkcja postaci: (wielomian) · (funkcja wykładnicza $e^{\gamma x}$), gdzie $\gamma \in \mathbb{R}$ jest danym współczynnikiem.

Mamy zatem równanie

$$ay'' + by' + cy = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)e^{\gamma x}. \quad (21)$$

Rozwiązania szczególnego równania (21) szukamy w tym przypadku w formie

$$y_{sz}(x) = e^{\gamma x} z(x),$$

co po zróżniczkowaniu

$$\begin{aligned} y'_{sz} &= (e^{\gamma x} z)' = (e^{\gamma x})' z + e^{\gamma x} z' = \gamma e^{\gamma x} z + e^{\gamma x} z' = e^{\gamma x} (\gamma z + z'), \\ y''_{sz} &= (e^{\gamma x} (\gamma z + z'))' = (e^{\gamma x})' (\gamma z + z') + e^{\gamma x} (\gamma z + z')' = \gamma e^{\gamma x} (\gamma z + z') + e^{\gamma x} (\gamma z' + z'') \\ &= e^{\gamma x} (\gamma^2 z + \gamma z' + z'') \end{aligned}$$

i wstawieniu do (21) daje

$$az'' + (2a\gamma + b)z' + (a\gamma^2 + b\gamma + c)z = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n. \quad (22)$$

Oznacza to, że problem znalezienia szczególnego rozwiązania równania (21) w tym przypadku sprowadza się do rozwiązywania (względem $z = z(x)$) równania (15), które jest tego samego typu co rozpatrywany już wcześniej przypadek. Pojawiają się trzy możliwości, które należy rozważyć:

- 1) $a\gamma^2 + b\gamma + c \neq 0$,
- 2) $a\gamma^2 + b\gamma + c = 0$ oraz $2a\gamma + b \neq 0$,
- 3) $a\gamma^2 + b\gamma + c = 0$ oraz $2a\gamma + b = 0$.

Przykład 7. Znajdź szczególne rozwiązanie równania

$$y'' - y' - 6 = (x - 2)e^{3x}.$$

Rozwiązania szukamy w postaci $y(x) = e^{3x}z(x)$, co daje

$$z'' + 5z' = -2 + x$$

Ponieważ w tym przypadku $c = 0$ (nie występuje wyraz zawierający samą funkcję z), więc rozwiązanie szczególne będzie miało postać

$$z_{sz}(x) = x(c_1 + c_2x).$$

Przykład 8. Znajdź szczególne rozwiązanie równania

$$y'' - y' - 6 = (x - 2)e^{3x}.$$

Rozwiązania szukamy w postaci $y(x) = e^{3x}z(x)$, co daje

$$z'' + 5z' = -2 + x.$$

Ponieważ w tym przypadku $c = 0$ (nie występuje po lewej stronie wyraz zawierający samą funkcję z), więc rozwiązanie szczególne będzie miało postać $z_{sz}(x) = x(\alpha_0 + \alpha_1x) = \alpha_0x + \alpha_1x^2$:

$$\begin{aligned} z''_{sz} + 5z'_{sz} = -2 + x &\Rightarrow (\alpha_0x + \alpha_1x^2)'' + 5(\alpha_0x + \alpha_1x^2)' = -2 + x \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_0 + 10\alpha_1x &= -2 + x \Rightarrow 2\alpha_1 + 5\alpha_0 = -2, \quad 10\alpha_1 = 1 \\ \Rightarrow \alpha_0 &= -\frac{3}{25}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Zatem $z_{sz} = -\frac{3}{25}x + \frac{1}{10}x^2$, więc $y_{sz}(x) = e^{3x}z_{sz}(x) = (-\frac{3}{25}x + \frac{1}{10}x^2)e^{3x}$.

Prawa strona – funkcja harmoniczna sinus lub kosinus: $f(x) = F \sin \omega t$ lub $f(x) = F \cos \omega t$.

Jest to ważny przypadek w zastosowaniach, gdyż może on opisywać układ fizyczny podlegający okresowemu (periodycznemu) oddziaływaniu z zewnątrz. Na przykład oscylator harmoniczny i zewnętrzna siła harmoniczna (ale o częstotliwości na ogół innej niż wewnętrzna częstotliwość oscylatora). Mamy więc na przykład równanie postaci

$$ay'' + by' + cy = F \sin \omega t. \quad (23)$$

Zacniemy od prostego przykładu:

Przykład 9. Znaleźć rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego

$$y'' + \omega_0^2 y = F \sin \omega t, \quad (24)$$

gdzie $F \in \mathbb{R}$ oraz $\omega_0, \omega > 0$ są danymi parametrami.

Okazuje się, że występują tu dwie istotnie różne sytuacje: (i) $\omega \neq \omega_0$, (ii) $\omega = \omega_0$.

Przypadek $\omega \neq \omega_0$. Rozwiązania szczególnego szukamy w postaci $y_{sz}(t) = A \sin \omega t$. Obliczamy

$$y'_{sz}(t) = (A \sin \omega t)' = A \omega \cos \omega t, \quad y''_{sz}(t) = (A \omega \cos \omega t)' = -A \omega^2 \sin \omega t,$$

i wstawiamy do równania (23):

$$\begin{aligned}(-A\omega^2 \sin \omega t) + \omega_0^2 (A \sin \omega t) &= F \sin \omega t, \\ A(-\omega^2 + \omega_0^2) \sin \omega t &= F \sin \omega t,\end{aligned}$$

skąd $A(-\omega^2 + \omega_0^2) = F$, czyli $A = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}$, pod warunkiem, że $\omega \neq \omega_0$. Rozwiązanie szczególne ma więc postać

$$y_{sz}(t) = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (\text{dla } \omega \neq \omega_0). \quad (25)$$

Zwróćmy uwagę na charakter tego rozwiązania. Mianowicie, amplituda $F / (\omega_0^2 - \omega^2)$ rośnie do nieskończoności, gdy $\omega \rightarrow \omega_0$. Jeżeli przyjmiemy, że ω_0 jest *częstotliwością własną* układu opisanego równaniem (24), a składnik $F \sin \omega t$ oznacza zewnętrzny czynnik wpływający na układ (np. siła), wtedy rozwiązanie (25) możemy interpretować w ten sposób: gdy częstotliwość czynnika zewnętrznego ω zbliża się do częstotliwości własnej układu ω_0 , to amplituda układu gwałtownie wzrasta (*rezonans*).

Pełne rozwiązanie równania (24) otrzymamy dodając ogólne rozwiązanie równania jednorodnego

$$y'' + \omega_0^2 y = 0,$$

które ma dwa rozwiązania podstawowe: $\sin \omega_0 t$, $\cos \omega_0 t$. Zatem ogólne rozwiązanie równania (24) w przypadku, gdy $\omega \neq \omega_0$ ma postać

$$y(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (26)$$

Przypadek $\omega = \omega_0$. Rozwiązanie szczególne (25) jest poprawne, gdy $\omega \neq \omega_0$. Natomiast dla $\omega = \omega_0$ musimy szukać innego rozwiązania szczególnego. Równanie (24) ma teraz postać (po obu stronach występuje ta sama częstotliwość ω_0):

$$y'' + \omega_0^2 y = F \sin \omega_0 t. \quad (27)$$

Rozwiązania szczególnego szukamy w formie

$$y_{sz}(t) = At \sin(\omega_0 t - \frac{1}{2} \pi) = At \cos \omega_0 t. \quad (28)$$

Obliczamy pochodne:

$$\begin{aligned}y'_{sz} &= (At \cos \omega_0 t)' = A \cos \omega_0 t - A \omega_0 t \sin \omega_0 t, \\ y''_{sz} &= -A \omega_0 \sin \omega_0 t - A \omega_0 \sin \omega_0 t - A \omega_0^2 t \cos \omega_0 t = -2A \omega_0 \sin \omega_0 t - A \omega_0^2 t \cos \omega_0 t,\end{aligned}$$

i wstawiamy do (27):

$$\begin{aligned}y'' + \omega_0^2 y &= F \sin \omega_0 t, \\-2A\omega_0 \sin \omega_0 t - A\omega_0^2 t \cos \omega_0 t + A\omega_0^2 t \cos \omega_0 t &= F \sin \omega_0 t, \\-2A\omega_0 \sin \omega_0 t &= F \sin \omega_0 t \Rightarrow -2A\omega_0 = F,\end{aligned}$$

skąd $A = -F / (2\omega_0)$. Szczególne rozwiązanie w tym przypadku wynosi więc

$$y_{sz}(t) = -\frac{F}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t \quad (\text{dla } \omega = \omega_0). \quad (29)$$

Dodając ogólne rozwiązanie równania jednorodnego otrzymamy pełne rozwiązanie równania (27)

$$y(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t - \frac{F}{2\omega_0} t \sin \omega t. \quad (30)$$

W ogólnym przypadku równania niejednorodnego

$$ay'' + by' + cy = F \sin \omega t \quad (31)$$

aby znaleźć szczególne rozwiązanie spodziewamy się, że będzie ono podobne do tego co jest w powyższym przykładzie. To sugeruje postać $y_{sz}(t) = A \sin \omega t$. Niestety, na skutek występowania składnika by' takie rozwiązanie szczególne nie istnieje. Należy je zmodyfikować dodając przesunięcie fazowe ϑ :

$$y_{sz}(t) = A \sin(\omega t + \vartheta). \quad (32)$$

Obliczamy pochodne

$$y'_{sz}(t) = (A \sin(\omega t + \vartheta))' = A\omega \cos(\omega t + \vartheta), \quad y''_{sz}(t) = (A\omega \cos(\omega t + \vartheta))' = -A\omega^2 \sin(\omega t + \vartheta),$$

rozwijamy

$$\cos(\omega t + \vartheta) = \cos \omega t \cos \vartheta - \sin \omega t \sin \vartheta, \quad \sin(\omega t + \vartheta) = \sin \omega t \cos \vartheta + \cos \omega t \sin \vartheta$$

i wstawiamy do (31)

$$\begin{aligned}a(-A\omega^2(\sin \omega t \cos \vartheta + \cos \omega t \sin \vartheta)) + b(A\omega(\cos \omega t \cos \vartheta - \sin \omega t \sin \vartheta)) \\ + cA(\sin \omega t \cos \vartheta + \cos \omega t \sin \vartheta) = F \sin \omega t,\end{aligned}$$

co po uporządkowaniu daje

$$\begin{aligned}a(-A\omega^2(\sin \omega t \cos \vartheta + \cos \omega t \sin \vartheta)) + b(A\omega(\cos \omega t \cos \vartheta - \sin \omega t \sin \vartheta)) \\ + cA(\sin \omega t \cos \vartheta + \cos \omega t \sin \vartheta) = F \sin \omega t, \\ A((-a\omega^2 + c)\cos \vartheta - b\omega \sin \vartheta)\sin \omega t + A((-a\omega^2 + c)\sin \vartheta + b\omega \cos \vartheta)\cos \omega t = F \sin \omega t.\end{aligned}$$

Ostatnia równość ma być spełniona dla każdego t , zatem musi zachodzić:

$$A((-a\omega^2 + c)\cos \vartheta - b\omega \sin \vartheta) = F, \quad A((-a\omega^2 + c)\sin \vartheta + b\omega \cos \vartheta) = 0.$$

Ponieważ szukamy rozwiązania niezerowego, więc $A \neq 0$, zatem z powyższych równości mamy układ równań na A i ϑ :

$$(-a\omega^2 + c)\cos \vartheta - b\omega \sin \vartheta = \frac{F}{A} \quad \text{oraz} \quad (-a\omega^2 + c)\sin \vartheta + b\omega \cos \vartheta = 0.$$

Nie jest to układ liniowy względem ϑ , ale dość łatwo można otrzymać amplitudę A (przesunięcia fazowego ϑ nie będziemy wyliczać). W tym celu podnosimy oba równania do kwadratu i dodajemy stronami:

$$\left. \begin{aligned} (-a\omega^2 + c)^2 \cos^2 \vartheta - 2(-a\omega^2 + c)b\omega \cos \vartheta \sin \vartheta + (b\omega)^2 \sin^2 \vartheta &= \frac{F^2}{A^2} \\ (-a\omega^2 + c)^2 \sin^2 \vartheta + 2(-a\omega^2 + c)b\omega \sin \vartheta \cos \vartheta + (b\omega)^2 \cos^2 \vartheta &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (-a\omega^2 + c)^2 + (b\omega)^2 = \frac{F^2}{A^2},$$

skąd ostatecznie obliczamy amplitudę, która zależy od częstotliwości wymuszającej ω :

$$A(\omega) = \frac{|F|}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + (b\omega)^2}}. \quad (33)$$

Zauważmy, że rozwiązanie szczególne z amplitudą daną wzorem (33) jest zawsze poprawne pod warunkiem, że $b \neq 0$. W mianowniku jest suma dwóch kwadratów. Nie musimy wtedy rozważać dwóch przypadków jak dla równania z (24) (**Przykładu 9**) w zależności od częstotliwości ω . Możemy to interpretować tak: gdy występuje tłumienie (składnik by'), to amplituda rezonansowa nie rośnie do nieskończoności (ta jak mamy we wzorze (26) dla $\omega \rightarrow \omega_0$ lub we wzorze (30) dla $t \rightarrow \infty$).

Podsumowując, ogólne rozwiązanie równania (31) przy założeniu $b \neq 0$ ma postać

$$y(t) = \underbrace{C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)}_{\text{ogólne rozw. rów. jednorodnego}} + \frac{|F|}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + (b\omega)^2}} \sin(\omega t + \vartheta), \quad (34)$$

gdzie część $C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$ jest rozwiązaniem równania $ay'' + by' + cy = 0$. Rozwiązanie (34) jest też poprawne dla $b=0$, ale częstotliwość wymuszająca musi być różna od częstotliwości własnej: $\omega^2 \neq \omega_0^2 = c/a$. W przypadku $b=0$ i $\omega^2 = \omega_0^2 = c/a$ mamy jednak rozwiązanie w postaci (29).

Przykład 10. Podać ogólne rozwiązanie równania

$$y'' + 2y' + 3y = 10\sin(\omega t),$$

oraz znaleźć wartość ω , dla której amplituda rozwiązania będzie największa (rezonans).

Rozwiązanie części jednorodnej: $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$, $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}$, czyli

$$y_{ORRJ}(t) = e^{-t} (C_1 \cos(\sqrt{3}t) + C_2 \sin(\sqrt{3}t)).$$

Szczególne rozwiązanie pełnego równania szukamy w postaci $A \sin \omega t$, co prowadzi do (34) dla $F=10$, $a=1$, $b=2$, $c=3$:

$$y(t) = e^{-t} (C_1 \cos(\sqrt{3}t) + C_2 \sin(\sqrt{3}t)) + \frac{10}{\sqrt{(-\omega^2 + 3)^2 + (2\omega)^2}} \sin(\omega t + \vartheta).$$

Amplituda $A(\omega) = 10 / \sqrt{(-\omega^2 + 3)^2 + (2\omega)^2}$ jest największa, gdy mianownik jest najmniejszy. Szukamy więc minimum funkcji $(-\omega^2 + 3)^2 + (2\omega)^2$. Rozwijając to wyrażenie mamy

$$(-\omega^2 + 3)^2 + (2\omega)^2 = (\omega^2)^2 - 6\omega^2 + 9 + 4\omega^2 = (\omega^2)^2 - 2\omega^2 + 9.$$

Jest to funkcja kwadratowa względem $s = \omega^2$: $s^2 - 2s + 9$. Po zróżniczkowaniu mamy równanie na minimum: $2s - 2 = 0$, $s = 1$. Stąd $\omega = 1$. Tak więc dla częstotliwości wymuszającej $\omega = 1$ rozwiązanie ma największą amplitudę

$$y(t) = e^{-t} (C_1 \cos(\sqrt{3}t) + C_2 \sin(\sqrt{3}t)) + \frac{5}{\sqrt{2}} \sin(t + \vartheta).$$

Przykład 11. Znaleźć rozwiązanie problemu początkowego

$$y'' + 3y = 5 \sin(\sqrt{3}t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1. \quad (35)$$

Ogólne rozwiązanie części jednorodnej, $y'' + 3y = 0$, to $C_1 \sin \sqrt{3}t + C_2 \cos \sqrt{3}t$ (por. (8)). Ponadto, częstotliwość własna $\omega_0^2 = 3 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{3}$, a częstotliwość zewnętrzna (człon $5 \sin(\sqrt{3}t)$) jest taka sama: $\omega = \sqrt{3}$. Tak więc rozwiązanie szczególne jest postaci $y_{sz}(t) = At \cos(\sqrt{3}t)$ (por. **Przypadek** $\omega = \omega_0$, rów. (27) i (28)). To prowadzi do amplitudy $A = -F / (2\omega_0) = -5 / 2\sqrt{3}$ (wzór (29)), czyli

$$y_{sz}(t) = -\frac{5}{2\sqrt{3}} t \cos(\sqrt{3}t).$$

Pełne rozwiązanie równania wynosi zatem

$$y(t) = C_1 \sin \sqrt{3}t + C_2 \cos \sqrt{3}t - \frac{5}{2\sqrt{3}} t \cos(\sqrt{3}t).$$

Pochodna

$$\begin{aligned} y'(t) &= C_1 (\sin \sqrt{3}t)' + C_2 (\cos \sqrt{3}t)' - \frac{5}{2\sqrt{3}} (t \cos(\sqrt{3}t)) \\ &= C_1 \sqrt{3} \cos \sqrt{3}t - C_2 \sin \sqrt{3}t - \frac{5}{2\sqrt{3}} (\cos(\sqrt{3}t) - t \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t)). \end{aligned}$$

Wstawiamy teraz warunki początkowe:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 \sin(\sqrt{3} \cdot 0) + C_2 \cos(\sqrt{3} \cdot 0) - \frac{5}{2\sqrt{3}} 0 \cdot \cos((\sqrt{3} \cdot 0)) = 2, \\ y'(0) &= C_1 \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \cdot 0) - C_2 \sin(\sqrt{3} \cdot 0) - \frac{5}{2\sqrt{3}} (\cos(\sqrt{3} \cdot 0) - 0 \cdot \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \cdot 0)) = -1, \end{aligned}$$

skąd

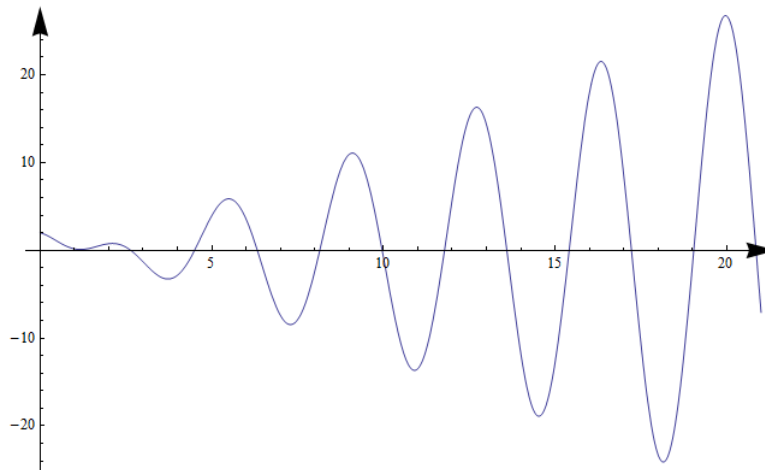
$$C_2 = 2, \quad C_1 \sqrt{3} - \frac{5}{2\sqrt{3}} = -1 \Rightarrow C_2 = 2, \quad C_1 = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{6}.$$

Ostatecznie

$$y(t) = \frac{5-2\sqrt{3}}{6} \sin \sqrt{3}t + 2 \cos \sqrt{3}t - \frac{5}{2\sqrt{3}}t \cos(\sqrt{3}t). \quad (36)$$

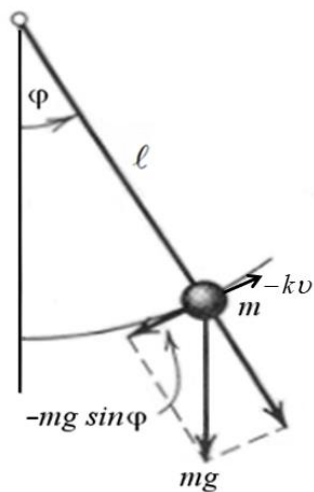
Jeżeli współczynniki powyższego rozwiązania przybliżymy liczbami wymiernymi, to otrzymamy przybliżoną postać (ale bardziej czytelną):

$$y(t) = 0,26 \sin(1,73t) + 2 \cos(1,73t) - 1,44t \cos(1,73t).$$



Rys. 1. Wykres rozwiązania równania (35) dla $t \in [0, 21]$. Postać analityczna rozwiązania dana jest wzorem (36). Zauważmy, że rozwiązanie ma charakter oscylacji o amplitudach rosnących nieograniczenie z czasem.

Wahadło matematyczne



Rys. 2. Wahadło matematyczne. Małe ciało o masie m zawieszone na sztywnej linki lub pręcie. Masa linki (pręta) jest pomijalna.

Rozważamy *wahadło matematyczne* w ośrodku stawiającym opór. Jeżeli $\varphi(t)$ oznacza kąt wychYLENIA (liczony względem pionu), to z rysunku widać, że w kierunku stycznym do toru (który jest okręgiem o promieniu ℓ) działają dwie siły: $-mg \ell \sin \varphi$ (składowa w kierunku stycznym siły ciężkości $-mg$) oraz $-kv$ (siła oporu ośrodka – zakładamy, że jest proporcjonalna do prędkości i oczywiście przeciwnie skierowana). Ponieważ przyspieszenie styczne $a_s = \ell \varphi''$, a prędkość styczna $v = \ell \varphi'$, to z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu $m \ell \varphi'' = -k \ell \varphi' - mg \sin \varphi$, gdzie: m – masa kulki, ℓ – długość linki (pręta), k – współczynnik oporu ośrodka, g – przyspieszenie grawitacyjne (dla Ziemi $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$). Wprowadzając oznaczenia $\alpha = k/m$, $\omega^2 = g/\ell$ otrzymamy $\varphi'' = -\alpha \varphi' - \omega^2 \sin \varphi$, czyli

$$\varphi'' + \alpha \varphi' + \omega^2 \sin \varphi = 0. \quad (37)$$

W typowych z fizyki lub mechaniki pochodną względem czasu zazwyczaj oznacza się kropką. Dlatego równanie wahadła (37) będzie tam zapisane tak

$$\ddot{\varphi} + \alpha \dot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$$

lub

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \alpha \frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 \sin \varphi = 0.$$

Niewiadomą jest tutaj funkcja $\varphi = \varphi(t)$. Równanie (37) jest drugiego rzędu i trochę przypomina ogólne równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu (1) lub (4), ale z istotną różnicą: ze względu na występowanie członu $\omega^2 \sin \varphi$ nie jest to równanie liniowe! Okazuje się, że rozwiązania tego równania nie można wyrazić przy pomocy funkcji elementarnych. Nawet gdy rozważamy wahadło w ośrodku bez oporu, tzn. dla $k = 0$, kiedy równie ruchu przyjmuje postać

$$\varphi'' + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (38)$$

to rozwiązanie nie wyraża się funkcjami elementarnymi. Oczywiście istnieją „wzory” na rozwiązanie równania (37) lub (38), na przykład przy pomocy tzw. całek eliptycznych, szeregów potęgowych lub trygonometrycznych. Można też oczywiście rozwiązywać te równania numerycznie.

Z drugiej strony często zastosowania problemu wahadła (i podobnych) prowadzą do sytuacji, kiedy wychylenie z położenia równowagi jest „małe”. Wtedy można wykorzystać przybliżenie wynikające z tego, że dla dostatecznie małych φ zachodzi $\sin \varphi \approx \varphi$. Jak pamiętamy z rozwinięcia Taylora funkcji sinus

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{1}{3!} \varphi^3 + \frac{1}{5!} \varphi^5 - \dots$$

więc odrzucając składniki wyższych rzędów możemy się spodziewać dobrego przybliżenia dla $\varphi \rightarrow 0$. Stosując to przybliżenie, równanie (37) ulegnie *linearyzacji*:

$$\varphi'' + \alpha \varphi' + \omega^2 \varphi = 0. \quad (39)$$

Takie równanie jest już równaniem liniowym jednorodnym o stałych współczynnikach i bez problemu można podać jego rozwiązania przy pomocy elementarnych wzorów.

Przykład. Podać ogólne rozwiązanie ruchu wahadła bez oporu w przybliżeniu małych drgań. Jaki jest okres oscylacji takiego wahadła i czy zależy on od amplitudy?

Przypomnijmy, że równanie bez oporu (38) ma postać $\varphi'' + \omega^2 \sin \varphi = 0$, gdzie $\omega = \sqrt{g / \ell}$. Dla małych wychyleń ($\sin \varphi \approx \varphi$), mamy więc

$$\varphi'' + \omega^2 \varphi = 0. \quad (40)$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

z pierwiastkami $\lambda = \pm i\omega$. Ze wzorów (10) mamy $\alpha = 0, \beta = \omega$. Na podstawie (11) otrzymujemy rozwiązanie ogólne

$$\varphi(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t. \quad (41)$$

W konkretnej sytuacji stałe C_1, C_2 są określone przez warunki początkowe (początkowe wychylenie oraz początkowa prędkość). Ale z postaci rozwiązania (41) widać, że niezależnie od wartości stałych (z wyjątkiem $C_1 = C_2 = 0$, ale wtedy mamy spoczynek) jest ono zawsze okresowe. Okres wyznaczamy wiedząc, że funkcje sinus i cosinus mają okres 2π :

$$\begin{aligned} \varphi(t+T) = \varphi(t) &\Leftrightarrow \sin(\omega(t+T)) = \sin(\omega t), \cos(\omega(t+T)) = \cos(\omega t), \\ \sin(\omega t + \omega T) = \sin(\omega t), \cos(\omega t + \omega T) = \cos(\omega t) &\Rightarrow \omega T = 2\pi \end{aligned} \quad (42)$$

czyli $T = 2\pi / \omega$. Tak więc okres wahań

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \quad (43)$$

jest niezależny od warunków początkowych. Niezależnie od amplitudy, prędkości początkowej czy początkowego wychylenia zawsze wahadło zlinearyzowane wykonuje oscyluje z tym samym okresem.

Zauważmy też, że aby rozwiązać równanie (40) nie musimy wykorzystywać wcześniej rozwiniętej teorii. Wystarczy zauważyć, że równanie $\varphi'' + \omega^2 \varphi = 0$, czyli $\varphi'' = -\omega^2 \varphi$ to pytanie o funkcję, która po dwukrotnym zróżniczkowaniu daje to samo, ale ze znakiem przeciwnym. Oczywiście wiemy, że taką własność mają funkcje sinus i cosinus:

$$(\sin t)'' = (\cos t)' = -\sin t, \quad (\cos t)'' = (-\sin t)' = -\cos t.$$

Zatem funkcje $\sin(t)$ i $\cos(t)$ spełniają równanie $\varphi'' = -\varphi$. Aby spełniały równanie $\varphi'' = -\omega^2 \varphi$ wystarczy zamiast zmienić argument na ωt :

$$(\sin \omega t)'' = (\omega \cos \omega t)' = -\omega^2 \sin \omega t, \quad (\cos \omega t)'' = (-\omega \sin \omega t)' = -\cos \omega t.$$