

Wprowadzenie

DEFINICJA. Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

gdzie $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ jest daną funkcją. Rozwiązaniem równania (1) nazywamy każdą funkcję $\varphi: \mathbb{R} \supset (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna i spełnia równość

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{dla } x \in (a, b).$$

Rozwiązanie będziemy oznaczać także symbolem $y = y(x)$, więc powyższy warunek zapiszemy jako

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{dla } x \in (a, b).$$

Pochodną oznacza się również symbolem $\frac{dy}{dx}$, a równanie (1) zapiszemy wtedy w postaci

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Równania różniczkowe zwyczajne różnią się od równań różniczkowych cząstkowych tym, że niewiadoma funkcja jest funkcją tylko jednej zmiennej (na ogół rzeczywistej – ale występują też równania o argumentie zespolonym). Zazwyczaj zmienną niezależną oznaczamy symbolem x , tak jak w definicji (1), ale w zastosowaniach często opisujemy równaniami różniczkowymi procesy zależne od czasu (np. kinetyka chemiczna), i wtedy naturalne jest używać t zamiast x . co oczywiście sugeruje interpretację tej zmiennej jako czasu. Wtedy równanie będzie miało postać

$$y' = f(t, y) \quad \text{lub} \quad \frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (2)$$

gdzie oczywiście funkcja niewiadoma będzie oznaczana przez $y = y(t)$.

Czasami zamiast niewiadomej funkcji $y(t)$ używa się $x(t)$, więc zamiast (1) będziemy pisać

$$x' = f(t, x). \quad (3)$$

Przykład 1. Równanie, w którym prawa strona $f(x, y) = x + y$, czyli równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = x + y, \quad (4)$$

ma na przykład rozwiązanie $y(x) = e^x - x - 1$. Przekonujemy się o tym przez podstawienie

$$\begin{aligned} y'(x) &= (e^x - x - 1)' = e^x - 1, \\ f(x, y(x)) &= x + y(x) = x + e^x - x - 1 = e^x - 1, \end{aligned}$$

zatem $y'(x) = f(x, y(x))$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Widać, że w tym przypadku funkcja $y(x) = e^x - x - 1$, która jest rozwiązaniem, jest określona na całej osi rzeczywistej, $x \in \mathbb{R}$. Zobaczymy dalej, że nie zawsze tak musi być.

Podane rozwiązanie nie jest jedyne, gdyż na przykład funkcja $y_1(x) = -x - 1$ też spełnia równanie (4)

$$\left. \begin{array}{l} y_1'(x) = (-x-1)' = -1, \\ \text{oraz} \\ x + y_1(x) = x + (-x-1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1'(x) = x + y_1(x) \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Tak naprawdę mamy tu całą rodzinę funkcji, które są rozwiązaniami równania (4), gdyż każda funkcja postaci

$$y(x) = Ce^x - x - 1, \quad (5)$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą rzeczywistą jest rozwiązaniem równania (4).

Przykład 2. Rozważmy następujące równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = y^2. \quad (6)$$

Jak widać prawa strona tego równania, czyli $f(x, y) = y^2$ jest bardzo „gładką” funkcją (posiada pochodne względem x i y dowolnego rzędu) i jest określona dla wszystkich argumentów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Przykładowym rozwiązaniem jest funkcja $y(x) = \frac{1}{1-x}$. Sprawdzamy to przez podstawienie

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\frac{1}{1-x} \right)' = -\frac{1}{(1-x)^2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}, \\ (y(x))^2 &= \left(\frac{1}{1-x} \right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}, \end{aligned}$$

czyli $y'(x) = y^2(x)$. Zauważmy jednak, że rozwiązanie jest określone na odcinku $(-\infty, 1)$ (lub na odcinku $(1, \infty)$). W ogólnym przypadku rozwiązanie równania (6) ma postać

$$y(x) = \frac{1}{C-x},$$

i jest określone na odcinku $(-\infty, C)$ lub (C, ∞) , a C jest dowolną stałą.

Podane przykłady pokazują, że samo równanie różniczkowe zwyczajne (1) nie gwarantuje istnienia tylko jednej funkcji, która jest rozwiązaniem (*jednoznaczności*). Aby można było oczekiwać takiej jednoznaczności, musimy wprowadzić jeszcze jakiś dodatkowy warunek, który musi spełniać rozwiązanie. Okazuje się, że dla równania postaci (1) takim warunkiem jest żądanie, aby rozwiązanie przyjmowało zadaną wartość w wybranym punkcie $x = x_0$. Prowadzi nas to do pojęcia *warunku początkowego* dla równania różniczkowego zwyczajnego (1).

DEFINICJA. Warunek postaci

$$y(x_0) = y_0, \quad (7)$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ są zadanymi liczbami takimi, że $(x_0, y_0) \in U = \text{dom } f$ nazywamy *warunkiem początkowym* (*warunkiem Cauchy’ego*).

Zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego zwyczajnego (zagadnienie Cauchy’ego) zapisywane symbolicznie następująco

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (8)$$

oznacza, że szukana funkcja $y = y(x)$ ma spełniać równanie $y' = f(x, y)$ i warunek początkowy (7).

Przykład 3. Jakie jest rozwiązanie następującego zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' = xy, \\ y(0) = 2. \end{cases} \quad (9)$$

Sprawdzamy przez podstawienie, że rozwiązaniem równania $y' = xy$ jest dowolna funkcja postaci $y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$. Aby był spełniony warunek początkowy $y(0) = 2$ musi zachodzić $Ce^0 = 2$, czyli $C = 2$.

Tak więc rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (9) jest funkcja $y(x) = 2e^{\frac{1}{2}x^2}$.

Oczywiście to, że funkcja $y(x) = 2e^{\frac{1}{2}x^2}$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego (9) nie oznacza jeszcze, że nie istnieją jakieś inne funkcje, które są rozwiązaniem tego problemu. Poniższy przykład ilustruje, że zagadnienie Cauchy'ego (8) może mieć wiele rozwiązań (*niejednoznaczność*).

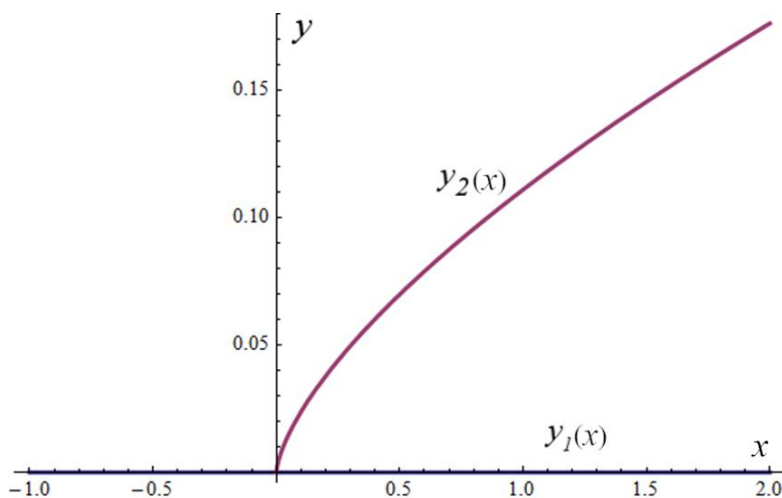
Przykład 4. Rozważmy następujący problem początkowy Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Widać, że funkcja tożsamościowo równa zero, $y_1(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, spełnia to równanie oraz warunek początkowy. Ale także funkcja $y_2(x) = \frac{1}{27}x^3$ jest rozwiązaniem zagadnienia (10), gdyż

$$y_2'(x) = \frac{3}{27}x^2 = \frac{1}{9}x^2 \quad \text{oraz} \quad (y_2(x))^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{x^3}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}(x^3)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}x^2 \Rightarrow y_2'(x) = (y_2(x))^{\frac{2}{3}},$$

oraz warunek początkowy $y_2(0) = \frac{1}{9} \cdot 0^{2/3} = 0$. Funkcje $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = \frac{1}{9}x^{\frac{2}{3}}$ są różne (i to w dowolnym otoczeniu punktu $x_0 = 0$), tak więc rozwiązanie problemu (10) *nie jest jednoznaczne!* Wykresy tych dwóch rozwiązań pokazano na **Rys. 1**.



Rys. 1. Wykresy dwóch przykładowych różnych rozwiązań zagadnienia początkowego (10).

Jeżeli jednak funkcja $f = f(x, y)$ spełnia pewne dość ogólne założenia, to problem (8) ma rozwiązanie – i to dokładnie jedno.

Przykład 5. Rozważamy równanie różniczkowe

$$y' = t^2 + 3y. \quad (11)$$

W tym przypadku argument niewiadomej jest oznaczony symbolem t , zatem niewiadoma jest funkcja $y = y(t)$. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$y(t) = Ce^{3t} - \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{2}{27},$$

co łatwo sprawdzamy

$$\begin{aligned} y'(t) &= 3Ce^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}, \\ t^2 + 3y(t) &= t^2 + 3\left(Ce^{3t} - \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{2}{27}\right) = t^2 + 3Ce^{3t} - t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{2}{9} = 3Ce^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{2}{9} \\ \Rightarrow y'(t) &= t^2 + 3y(t). \end{aligned}$$

Gdybyśmy zamiast tylko ogólnego problemu (11) rozważali zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y' = t^2 + 3y, \\ y(1) = 4, \end{cases} \quad (12)$$

to wyliczymy stałą $C = \frac{125}{27}e^{-3}$, co po wstawieniu do ogólnego rozwiązanie daje

$$y(t) = \frac{125}{27}e^{3(t-1)} - \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{2}{27}.$$

Metoda rozdzielania zmiennych

Równanie różniczkowe postaci

$$y' = f(x)g(y) \quad (13)$$

nazywamy *równaniem o rozdzielonych zmiennych*. Okazuje się, że analityczne rozwiązywanie tego równania sprowadza się do obliczania odpowiednich całek. Symbolicznie możemy postępowanie prowadzące do rozwiązania zapisać tak

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) &\Rightarrow dy = f(x)g(y)dx \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)dx + C \quad \text{lub} \quad \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(s)ds. \end{aligned}$$

Obliczając całki $\int \frac{dy}{g(y)}$, $\int f(x)dx$ uzyskujemy rozwiązanie $y = y(x)$ w postaci uwikłanej. Czasami możemy obliczyć te całki i „rozwikłać” odpowiednią równość uzyskując rozwiązanie w postaci jawnej.

Przykład 6. Rozwiązać równanie $y' = (\sin x)y^2$. Jest to równanie o rozdzielonych zmiennych. Postępujemy jak powyżej

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (\sin x)y^2, \\ \frac{dy}{y^2} &= \sin x \, dx, \\ \int \frac{dy}{y^2} &= \int \sin x \, dx,\end{aligned}$$

co daje równość $-\frac{1}{y} = -\cos x + C$, więc ogólne rozwiązanie ma postać

$$y(x) = \frac{1}{\cos x + C},$$

gdzie C jest dowolną stałą.

Gdybyśmy mieli do rozwiązania zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y' = (\sin x)y^2, \\ y(0) = 2, \end{cases} \quad (14)$$

to tylko musimy jeszcze wyliczyć stałą C z warunku $y(0) = 2$,

$$y(0) = \frac{1}{\cos 0 + C} = 2 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

Rozwiązaniem jest więc funkcja

$$y(x) = \frac{1}{\cos x - 1/2} = \frac{2}{2\cos x - 1}.$$

Zauważmy ponadto, że największym przedziałem na którym jest określone to rozwiązanie jest przedział $(a, b) = (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Wybraliśmy ten przedział jako dziedzinę rozwiązania, gdyż musi on zawierać warunek początkowy $x_0 = 0$. Zatem *rozwiązaniem wysyconym* zagadnienia (14) jest funkcja

$$y : (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \ni x \mapsto \frac{2}{2\cos x - 1} \in \mathbb{R}.$$

Przykład 7. Rozwiązać problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' = \frac{x+2}{y+1}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{y+1} \Rightarrow (y+1)dy = (x+2)dx, \quad \int (y+1)dy = \int (x+2)dx,$$

zatem $\frac{1}{2}y^2 + y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$. Wartość stałej całkowania C obliczymy z warunku początkowego $y(0) = 2$. Skąd mamy: $\frac{1}{2}2^2 + 2 = \frac{1}{2}0^2 + 2 \cdot 0 + C$, czyli $C = 4$. W ten sposób uzyskujemy rozwiązanie $y = y(x)$ w postaci uwikłanej:

$$\frac{1}{2}y^2 + y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4.$$

W tym konkretnym przypadku nie ma problemu z rozwiązaniem („rozwikłaniem”) tej zależności względem y , gdyż jest to proste równanie kwadratowe na $y(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}y^2 + y &= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 \quad | \cdot 2 \\ y^2 + 2y - x^2 - 4x - 8 &= 0, \\ \Delta &= 4 - 4(-x^2 - 4x - 8) = 4x^2 + 16x + 36, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{x^2 + 4x + 9},\end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \frac{-2 + 2\sqrt{x^2 + 4x + 9}}{2} = -1 + \sqrt{x^2 + 4x + 9}, \\ y_2(x) &= \frac{-2 - 2\sqrt{x^2 + 4x + 9}}{2} = -1 - \sqrt{x^2 + 4x + 9}.\end{aligned}$$

Z tych dwóch funkcji tylko pierwsza spełnia warunek początkowy $y(0) = 2$. Tak więc rozwiązaniem problemu jest

$$y(x) = -1 + \sqrt{x^2 + 4x + 9}.$$

Zauważmy też, że dziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$, gdyż wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 8. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} \sqrt{1 + y^2}, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) = -\infty. \end{cases}$$

Nie jest to typowy problem początkowy, gdyż dodatkowy warunek został sformułowany w postaci żądania, aby granica rozwiązania w 1 wynosiła $-\infty$.

Tak więc szukana funkcja zależy od x , tj. $y = y(x)$ musi spełniać podane wyżej dwa warunki. Zauważmy też, że ściśle rzecz biorąc nie jest to problem Cauchy’ego, ale z zapisu problemu można jednoznacznie wnioskować jakie zależności musi spełniać rozwiązanie.

Rozwiązanie: Stosując rozdzielanie zmiennych mamy

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} \sqrt{1 + y^2}, \\ \frac{dy}{y\sqrt{1 + y^2}} &= \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y\sqrt{1 + y^2}} = \int \frac{dx}{x} + const.\end{aligned}$$

Ponieważ $\int \frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}} = \ln\left(\frac{1}{y} + \sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\right) + \text{const}$, zatem $\ln\left(\frac{1}{y} + \sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\right) = \ln x + \text{const}$, co można przepisać tak

$$\frac{1}{y} + \sqrt{1+\frac{1}{y^2}} = Cx.$$

Z warunku początkowego $y(1^+) = -\infty$ znajdujemy stałą całkowania $C=1$, co prowadzi do rozwiązania

$$\frac{1}{y} + \sqrt{1+\frac{1}{y^2}} = x.$$

w postaci uwikłanej. W tym przypadku potrafimy rozwiązać je względem y i ostatecznie otrzymamy

$$y(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \quad \text{dla } x > 1. \quad (15)$$

Równania różniczkowe zwyczajne liniowe (pierwszego rzędu)

DEFINICJA. Równanie różniczkowe zwyczajne postaci

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (16)$$

gdzie $p(x)$ i $q(x)$ są danymi funkcjami dla $x \in (a, b)$, nazywa się *równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu*. Jeżeli $q(x) \equiv 0$, to równanie nazywamy *równaniem liniowym jednorodnym*.

Jednym ze sposobów rozwiązywania równania (16) jest *metoda uzmienniania stałej*. Zaczynamy od rozwiązywania równania jednorodnego (tzn. opuszczamy w równaniu (16) funkcję $q(x)$).

$$y' = -p(x)y,$$

czyli

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -p(x)y, \\ \frac{dy}{y} &= -p(x)dx, \end{aligned}$$

skąd $\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$, $\ln y = -\int p(x)dx + \text{const}$, czyli

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}. \quad (17)$$

Teraz traktujemy stałą C tak, jakby to była funkcja („uzmiennienie stałej”) i poszukujemy jakiegokolwiek (czyli tzw. szczególnego) rozwiązania równania niejednorodnego, tzn. szukamy dowolnego rozwiązania równania (16), które ma w postać

$$y_{sz}(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (18)$$

Powszechnie używa się określenia – *rozwiązanie szczególne*, stąd indeks „sz”. Podstawiamy funkcję (18) do (16), co prowadzi do równania na $C(x)$. Po wyznaczeniu rozwiązania szczególnego: dodajemy dwa rozwiązania: ogólne (równania jednorodnego) oraz szczególne (równania niejednorodnego). Okazuje się, że ta suma jest pełnym rozwiązaniem równania liniowego (16)

Przykład 9. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego

$$y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}} \sin x. \quad (19)$$

Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne $y' = -xy$, co daje

$$y(x) = Ce^{-\int x dx} = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}. \quad (20)$$

Teraz szukamy rozwiązania szczególnego w postaci $y_{sz} = C(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$, zatem podstawiamy to wyrażenie do (19):

$$\begin{aligned} y'_{sz} + xy_{sz} &= C'e^{-x^2/2} + C \cdot (-x)e^{-x^2/2} + xCe^{-x^2/2} = e^{-x^2/2} \sin x, \\ C'e^{-x^2/2} &= e^{-x^2/2} \sin x, \\ C' &= \sin x. \end{aligned}$$

Z ostatniego równania mamy oczywiście $C(x) = -\cos x$, co po podstawieniu daje $y_{sz}(x) = -e^{-x^2/2} \cos x$. Zgodnie z teorią ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego jest sumą ogólnego rozwiązania równania jednorodnego i jakiegoś dowolnego („szczególnego”) rozwiązania równania niejednorodnego, zatem

$$y(x) = Ce^{-x^2/2} - e^{-x^2/2} \cos x = e^{-x^2/2} (C - \cos x). \quad (21)$$

Jeżeli równanie (19) uzupełnić o warunek początkowy, na przykład $y(0) = 3$, rozwiązanie takiego problemu Cauchy’ego otrzymamy wyliczając stałą C ze wzoru (21) wstawiając warunek początkowy:

$$y(0) = Ce^0 - e^0 \cos 0 = C - 1 = 3 \Rightarrow C = 4.$$

Tak więc problem początkowy

$$\begin{cases} y' + xy = e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin x, \\ y(0) = 3, \end{cases}$$

ma rozwiązanie $y(x) = 4e^{-x^2/2} - e^{-x^2/2} \cos x = e^{-x^2/2} (4 - \cos x)$.

RÓWNANIE BERNOULLIEGO

Istnieją pewne typy równań, które nie są liniowe, ale można je do takiej postaci sprowadzić. Jako jeden z przykładów rozważmy równanie nieliniowe

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0. \quad (22)$$

Równanie to nazywa się *równaniem Bernoulliego*, a liczbę n nazywamy *wykładnikiem Bernoulliego*. Może to być dowolna liczba rzeczywista. Dla $n = 0$ lub $n = 1$ równanie (22) jest równaniem liniowym. Dlatego interesować nas będzie przypadek, gdy $n \notin \{0, 1\}$. Stosujemy następujące podstawienie

$$z = y^{1-n}, \quad (23)$$

tzn. będziemy chcieli uzyskać równanie na funkcję $z(x) = [y(x)]^{1-n}$. Mamy $z' = (1-n)y^{-n}y'$, więc mnożąc równanie (22) przez y^{-n} otrzymujemy

$$\begin{aligned} y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} + q(x) &= 0, \\ \frac{1}{1-n}z' + p(x)z + q(x) &= 0, \end{aligned}$$

czyli równanie liniowe

$$z' + (1-n)p(x)z + (1-n)q(x) = 0, \quad (24)$$

na funkcję $z = z(x)$.

Przykład 10. Rozwiązać równanie

$$y' = xy + y^2. \quad (25)$$

Jest to przykład równania Bernoulliego z wykładnikiem $n = 2$. Stosujemy zatem podstawienie

$$z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}.$$

Mamy

$$y' = -\frac{z'}{z^2},$$

więc po wstawieniu do (24) otrzymujemy

$$-\frac{z'}{z^2} = x\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2},$$

co daje równanie liniowe $z' = -xz - 1$.

Przykład 11. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y' + \frac{1}{x}y - \frac{\ln x}{x}y^2 = 0. \quad (26)$$

Stosujemy podstawienie (23) dla $n = 2$, czyli $z = y^{-1}$, co daje liniowe równanie

$$z' - \frac{1}{x}z + \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne $z' - \frac{1}{x}z = 0$, czyli $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$, więc $\ln z = \ln x + \text{const}$, skąd $z(x) = Cx$. Następnie stosujemy uzmiennianie stałej, $z(x) = C(x)x$. Wstawiamy do równania niejednorodnego

$$C'x + C - \frac{1}{x}Cx + \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow C'x + \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Całkujemy $C' = -\frac{\ln x}{x^2}$:

$$\begin{aligned} C(x) &= -\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x}\right)' \ln x dx = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x} (\ln x)' dx = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

To daje rozwiązanie szczególne $z_{sz}(t) = C(x)x = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)x = 1 + \ln x$. Tak więc rozwiązanie ogólne równania na $z = z(x)$ jest następujące

$$z(x) = Cx + \ln x + 1.$$

Wracając do funkcji y , poprzez $z = y^{-1}$, otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (26) jako

$$y(x) = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}.$$