

Całka oznaczona funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

Wstęp

W matematyce istnieje kilka wariantów pojęcia całki. Historycznie pierwszą metodą, którą można by określić mianem całkowania była tzw. *metoda wyczerpywania* rozwinięta przez greckiego matematyka Eudoksosa z Knidos (408–355 p.n.e.). Polegała ona na obliczaniu pól figur płaskich poprzez wpisywanie w nie ciągu wielokątów o znanej powierzchni, które „zbliżały” się do tej figury. Współcześnie bardzo ogólnym sposobem zdefiniowania całki jest *teoria całki Lebesgue’a* (1904), czyli *całka względem miary*. Wymaga ona jednak najpierw wprowadzenia abstrakcyjnego pojęcia miary (jest to uogólnienie takich pojęć geometrii elementarnej jak długość odcinka, pole prostokąta, objętość prostopadłościanu, długość krzywej, pole figury płaskiej itd.). Dla naszych potrzeb wystarczy jednak prostsze (ale mniej ogólne i obarczone istotnymi wadami) pojęcie całki, które pojawiło się w pracach Riemanna (1854), dlatego nazywa się ją *całką Riemanna*. Całka ta charakteryzuje się dość intuicyjną definicją (poprzez tzw. *sumy częściowe*) i ma oczywistą interpretację jako pole pod wykresem funkcji. Całka Riemanna jest określona poprawnie tylko dla funkcji ciągłych (ewentualnie posiadających dyskretny zbiór nieciągłości typu „skończony skok”). W przypadku funkcji jednej zmiennej ($x \in \mathbb{R}$) dziedziną całkowania będzie odcinek domknięty $[a, b]$. Uogólnienie na przypadek odcinka nieskończonego uzyskuje się przez odpowiednie przejście graniczne.

Uwagi do definicji całki Riemanna [nieobowiązkowe]

Podziałem odcinka $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nazywamy dowolny skończony ciąg liczb $x_0, x_1, \dots, x_n$ taki, że

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (1)$$

Punkty x_i nazywamy *węzłami* podziału. Określamy *średnicę* podziału jako najmniejszą odległość pomiędzy węzłami podziału

$$\delta = \max\{|x_{i+1} - x_i| : i = 0, \dots, n-1\}. \quad (2)$$

Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie daną funkcją. Dla danego podziału $\{x_i\}_{i=0}^n$ wybieramy dowolny ciąg punktów $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ takich, że $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Inaczej mówiąc wybieramy dowolny punkty w każdym z podprzedziałów $[x_i, x_{i+1}]$ naszego podziału. Punkty ξ_i nazywamy *punktami pośrednimi podziału* $\{x_i\}$. Definicja całki Riemanna opiera się na tzw. *sumach częściowych* (Rysunek 1) wyznaczonych przez podział i punkty pośrednie:

$$S_n(f; \{x_i\}_{i=0}^n, \{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i). \quad (3)$$

Jeżeli dla każdego podziału $\{x_i\}$ spełniającego warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ oraz dowolnego wyboru punktów pośrednich $\{\xi_i\}$ ciąg sum częściowych (3) zmierza do tej samej granicy $S \in \mathbb{R}$, to granicę tę nazywamy *całką oznaczoną* (w sensie Riemanna) *funkcji* f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (4)$$

Mamy więc z definicji

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(\xi_i^{(n)}) (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}), \quad (5)$$

gdzie $\{x_i^{(n)}\}_{i=0}^n$ jest dowolnym ciągiem podziałów spełniającym warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. Możemy więc dowolnie wybrać podziały (byle średnice zmierzały do zera) i dowolne punkty pośrednie. Na przykład podział może być na równe odcinki, a punkty pośrednie wybrane w środkach tych odcinków:

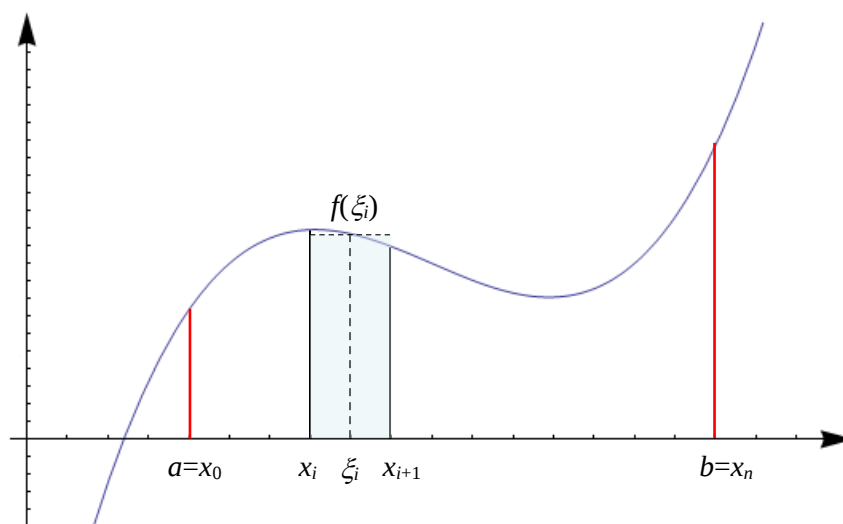
$$x_i = a + i \cdot h, \quad \xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad h = (b - a)/n,$$

bo w takim przypadku oczywiście $\delta_n = h = (b - a)/n$, zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. W tym przypadku mamy $x_{i+1} - x_i = h = (b - a)/n$ więc suma nieskończona (5) przybiera postać

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)\right) = (b - a) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n} f(a + (i + 1/2)h), \quad (6)$$

który jest w podstawą do numerycznej metody obliczania całek zwanej metodą prostokątów. Inne często używane metody to *metoda trapezów* i *metoda Simpsona*.

Teoretycznie można by używać wzoru (5) do dokładnego obliczania całek, ale w praktyce byłoby to żmudne i nieefektywne. Natomiast przy *obliczaniu numerycznym* całki oznaczonej, gdy chcemy uzyskać liczbową wartość, niekoniecznie dokładną, ale przybliżającą całkę (4) z wystarczającą do zastosowań dokładnością, możemy posługiwać się wzorem (6) lub innymi podobnymi. Jest to domena metod numerycznych.



Rysunek 1. Definicja całki Riemanna na odcinku $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Podstawowym wynikiem rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej, który łączy pochodną z całką oznaczoną, oraz który daje możliwość obliczania całki oznaczonej (Riemanna) poprzez funkcje pierwotne jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE. Jeżeli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to dla całki Riemanna zachodzi następująca równość

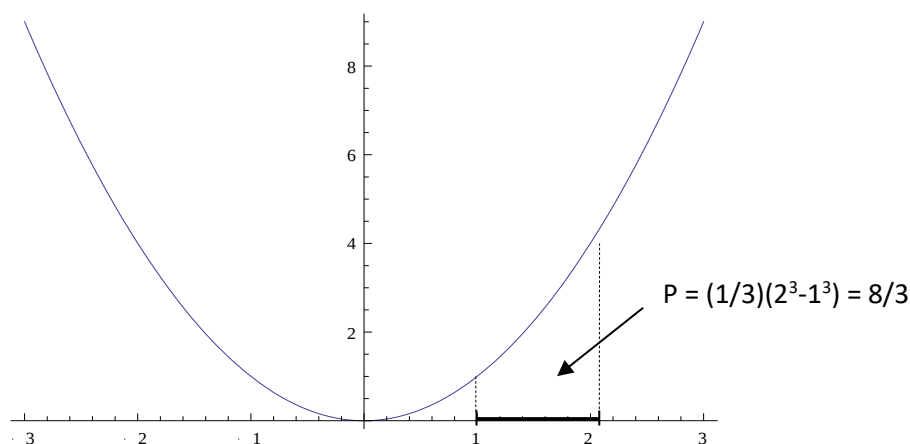
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (7)$$

gdzie F jest dowolną pierwotną funkcji f , tzn. $F' = f$.

Zatem obliczanie całki oznaczonej funkcji ciągłej może być sprowadzone do znajdowania pierwotnej. Na przykład

$$\int_a^b x^2 dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_a^b = \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} a^3 = \frac{b^3 - a^3}{3},$$

gdyż pierwotną dla funkcji x^2 jest $F(x) = \frac{1}{3} x^3$. Ponadto, ponieważ wykres funkcji x^2 nie ma fragmentów znajdujących się poniżej osi poziomej, więc powyższy wzór określa pole pomiędzy parabolą a dowolnym odcinkiem $[a, b] \subset \mathbb{R}$ leżącym na osi Ox (Rysunek 2).



Rysunek 2. Pole pod wykresem paraboli $y=x^2$.

Zależność wyrażona we wzorze (7) jest tak ważna, że zapiszemy ją jeszcze raz w nieco zmienionej postaci, która znana jest jako **PODSTAWOWE TWIERDZENIE RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO** funkcji jednej zmiennej. Poniżej symbol $C([a, b])$ oznacza zbiór wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych określonych na odcinku $[a, b]$.

TWIERDZENIE. Niech $f \in C([a, b])$ oraz $F(x) = \int_a^x f(s)ds$ dla $x \in [a, b]$. Wtedy F jest różniczkowalna oraz

$$F'(x) = f(x) \text{ dla } x \in [a, b]. \quad (8)$$

Funkcję zdefiniowaną przez całkę po zmiennym obszarze $([a, x])$ tak, jak to jest w powyższym twierdzeniu, czyli $F(x) = \int_a^x f(s)ds$, określa się czasami jako „funkcję górnej granicy całkowania”.

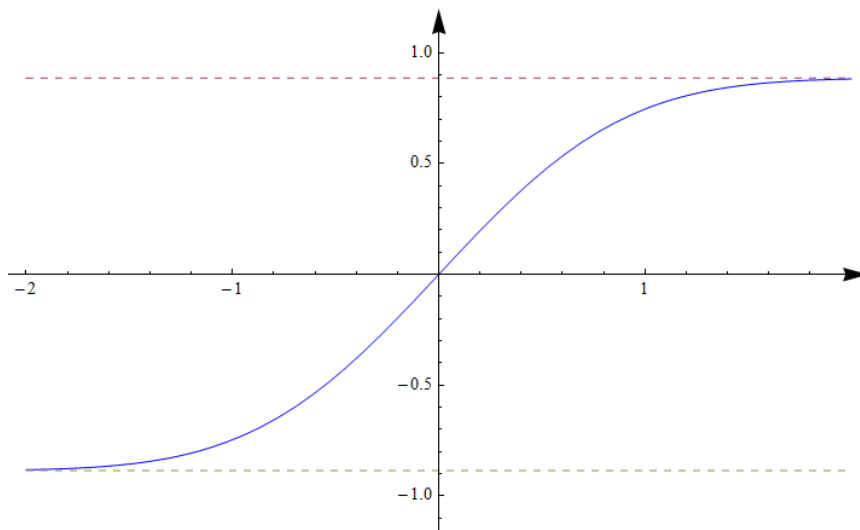
Jeżeli na przykład zdefiniujemy funkcję wzorem

$$F(x) = \int_0^x e^{-s^2} ds, \quad (9)$$

to wzór ten poprawnie definiuje funkcję F dla każdego $x \in \mathbb{R}$. W zasadzie nie ma prostszego sposobu wyrażenia całki nieoznaczonej $\int e^{-s^2} ds$ (całka ta nie wyraża się w sposób skończony poprzez funkcje elementarne), ale nie znaczy to, że funkcja zdefiniowana wzorem (9) jest bardziej tajemnicza niż na przykład sinus lub jakiś wielomian. Możemy bardzo szczegółowo określić zachowanie się funkcji danej wzorem (9). Znamy jej pochodną – co wynika ze wzoru (8): $F'(x) = e^{-x^2} > 0$. Ponieważ pochodna jest dodatnia, zatem funkcja F jest rosnąca w całej dziedzinie $(-\infty, +\infty)$. Druga pochodna

$$F''(x) = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$$

jest ujemna dla $x > 0$, dodatnia dla $x < 0$, równa zero dla $x = 0$. Tak więc druga pochodna zmienia znak w zerze, a to oznacza, że jest tam punkt przegięcia. Wykres funkcji F jest pokazany na rysunku.



Rys. 1. Wykres funkcji zdefiniowanej całką, $F(x) := \int_0^x e^{-s^2} ds$.

Jak widzimy z wykresu funkcja ma asymptoty poziome (dla $\pm\infty$), choć nie jest to oczywiste z samej definicji (9). Jedyne co na razie wiemy to, że funkcja jest rosnąca (ale może być na przykład $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$). Okazuje się, że jednak nasza funkcja ma skończoną granicę w nieskończoności, co wynika ze skończoności następującej całki

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (10)$$

Podobnie jak dla całki nieoznaczonej, tak samo dla całki oznaczonej istnieją wzory na całkowanie przez części oraz na zamianę zmiennej (całkowanie przez podstawienie).

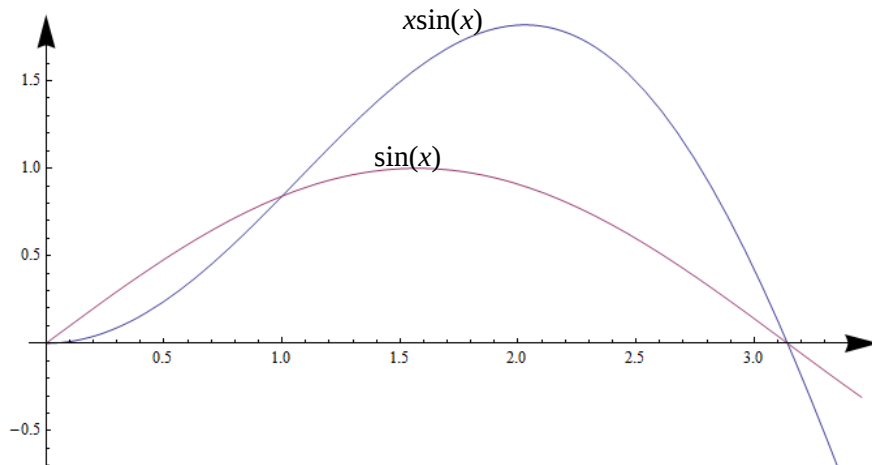
CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI. Dane są funkcje $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalne w sposób ciągły (to znaczy $f, g \in C^1([a, b])$). Wtedy zachodzi równość

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \quad (11)$$

Na przykład

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \int_0^{\pi} x(-\cos x)' \, dx = (-x \cos x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x'(-\cos x) \, dx = -(\pi \cos \pi - 0 \cos 0) + \underbrace{\int_0^{\pi} \cos x \, dx}_{=0}$$

$$= -\pi(-1) + 0 = \pi.$$



Rysunek 3. Wykresy funkcji $y = \sin(x)$ i $y = x \cdot \sin(x)$ na przedziale $[0; 1,1\pi]$.

Zatem pole pod wykresem funkcji $x \sin x$ na przedziale $[0, \pi]$ jest większe od pola pod wykresem funkcji $\sin x$: $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \pi > \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$. Zależność taką wyraźnie sugerują wykresy tych funkcji na wykresach (Rysunek 3).

CAŁKOWANIE PRZÉZ PODSTAWIENIE (ZAMIANA ZMIENNYCH W CAŁCE)

Dana jest ciągła funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Niech $x = \varphi(t)$ będzie różniczkowalna w sposób ciągły. Wtedy zachodzi równość

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{t_a}^{t_b} f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt, \quad (12)$$

gdzie granice całkowania po nowej zmiennej t są wyznaczone z równości $a = \varphi(t_a)$, $b = \varphi(t_b)$. Czasami zamiast podstawiania $x = \varphi(t)$ używamy $t = \psi(x)$. Ale to dalej sprowadzić można do pierwszego podstawienia, gdyż z równości $t = \psi(x)$ możemy wyliczyć $x = \psi^{-1}(t)$ (tutaj symbol ψ^{-1} oznacza funkcję odwrotną do ψ).

Na przykład

$$\int_2^3 x e^{-x^2} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right\} = \int_4^9 \frac{1}{2} e^{-t} \, dt = \frac{1}{2} (-e^{-t}) \Big|_4^9 = \frac{1}{2} (-e^{-9} - (-e^{-4}))$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-4} - e^{-9}) \approx 0,00909611.$$

W przypadku stosowania całek często zachodzi konieczność szacowania pewnych całek przez inne (oszacowanie oznacza w matematyce użycie nierówności). Jednym z takich przykładów jest nierówność Schwarza (szczególny przypadek nierówności Cauchy'ego–Schwarza):

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{1/2} \quad (13)$$

Dowód. Nierówność Schwarza dla całek dowodzi się stosunkowo prosto. Wystarczy skorzystać z dwóch faktów: całka z funkcji nieujemnej jest nieujemna oraz całka jest operacją liniową.

Definiujemy pomocniczą funkcję $w = w(t)$ zmiennej $t \in \mathbb{R}$ następująco

$$w(t) = \int_a^b (f(x) - t \cdot g(x))^2 dx.$$

Z definicji tej wynika, że $w(t) \geq 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Ponadto mamy

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_a^b (f(x) - t \cdot g(x))^2 dx = \int_a^b f^2(x) - 2f(x) \cdot t \cdot g(x) + t^2 g^2(x) dx = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + t^2 \int_a^b g^2(x) dx. \end{aligned}$$

Widać, że funkcja $w(t)$ jest tak naprawdę trójmianem kwadratowym $w(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$, gdzie

$$a_2 = \int_a^b f^2(x) dx, \quad a_1 = -2 \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad a_0 = \int_a^b g^2(x) dx.$$

Ponieważ dla trójmianu tego jest $w(t) \geq 0$ oraz $a_2 > 0$, więc jego wyróżnik nie może być dodatni! Zatem zachodzi $\Delta \leq 0$, czyli

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1^2 - 4a_2 a_0 = \left(-2 \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_a^b g^2(x) dx \int_a^b f^2(x) dx \leq 0 \\ 4 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq 4 \int_a^b g^2(x) dx \int_a^b f^2(x) dx, \end{aligned}$$

skąd mamy nierówność (13).

PRZYKŁADY

$$1) \int_1^2 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{4} \cdot 1^4 = 4 - \frac{1}{4} = 3,75.$$

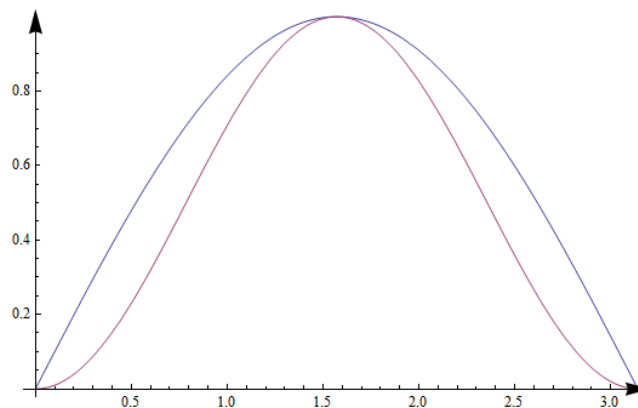
2) Jakie jest pole pod jednym łukiem funkcji sinus, a jakie pod sinus do kwadratu?

Całkujemy funkcję sinus na odcinku $[0, \pi]$:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

Całkujemy funkcję $\sin^2 x$ po odcinku $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



Rysunek 4. Wykresy funkcji $\sin(x)$ i $\sin^2(x)$ na przedziale $[0, \pi]$.

3) Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$.

Funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną – ale już w postaci *ułamka prostego*. Jest tak dlatego, że wielomian, który jest w mianowniku nie jest już rozkładalny w zbiorze $\mathbb{R}$. Można to sprawdzić obliczając wyróżnik: $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 10 = 36 - 40 = -4 < 0$. Zapisujemy teraz wielomian tak, aby można było zastosować podstawienie sprowadzające go do postaci $t^2 + 1$.

$$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 + 10 - 3^2 = (x + 3)^2 + 1.$$

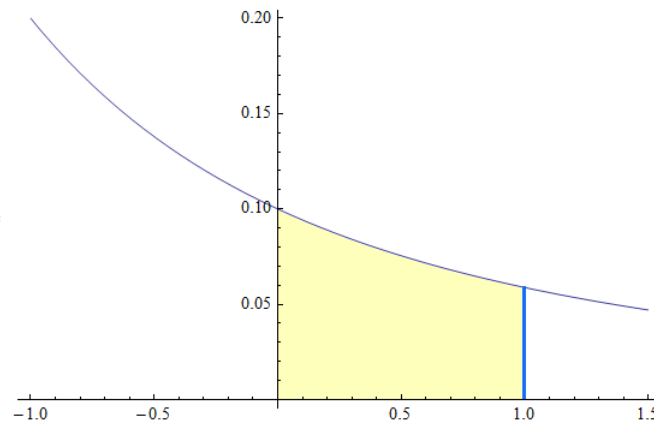
W tym przypadku podstawienie będzie bardzo proste: $t = x + 3$, zatem $dt = dx$. Liczymy

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 6x + 10} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+3)^2 + 1} = \int_3^4 \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctg t \Big|_3^4 = \arctg 4 - \arctg 3 \approx 0,07677.$$

Obliczona całka jest równa polu obszaru zaznaczonego na poniższym rysunku na żółto. Z rysunku widać, że dobrym przybliżeniem tego pola jest pole trapezu o wysokości $h = 1 - 0 = 1$ i podstawach

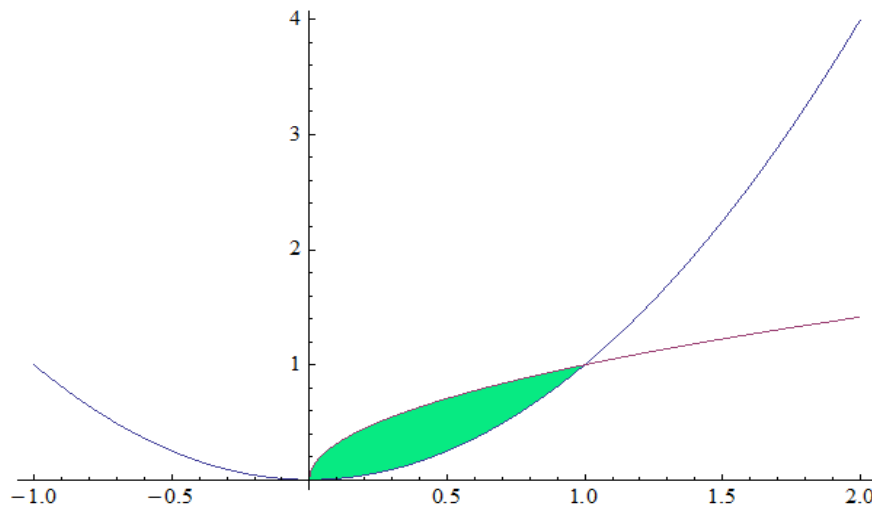
$$a = \frac{1}{x^2 + 6x + 10} \Big|_{x=0} = 0,1 \text{ oraz } b = \frac{1}{x^2 + 6x + 10} \Big|_{x=1} = \frac{1}{17},$$

zatem $h(a + b) / 2 = 1 \cdot (0,1 + 1/17) / 2 \approx 0,07941$ co jest niezłym przybliżeniem całki (0,07677).



4) Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi $y = x^2$, $x = y^2$.

Z określenia drugiej krzywej widać, że $x \geq 0$, zatem możemy to drugie równanie zapisać równoważnie jako $y = \sqrt{x}$. Poniżej są pokazane wykresy obu funkcji.



Punkty wspólne znajdujemy przyrównując do siebie obie funkcje, co daje równanie: $x^2 = \sqrt{x}$. Z tego równania mamy

$$x^4 = x \text{ czyli } x^4 - x = 0 \Rightarrow \\ x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ lub } x^3 = 1.$$

Jedynymi rozwiązaniami tego równania są $x = 0$ oraz $x = 1$. Oznacza to, że wykresy przecinają się tylko dla tych argumentów (co zresztą widać na rysunku). Tak więc pole zaznaczonego obszaru możemy obliczyć jako całkę z różnicy $\sqrt{x} - x^2$ na przedziale $[0, 1]$.

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2) dx = \left(\frac{1}{1+1/2} x^{1+1/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Bigg|_0^1 = \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Bigg|_0^1 = \\ = \left(\frac{2}{3} 1^{3/2} - \frac{1}{3} 1^3 \right) - \left(\frac{2}{3} 0^{3/2} - \frac{1}{3} 0^3 \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

5) Obliczyć pole koła przy pomocy całki oznaczonej.

Ogólne równanie okręgu na płaszczyźnie ma postać $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, gdzie x_0, y_0 to współrzędne środka, a $r > 0$ jest promieniem okręgu. Wystarczy jednak ograniczyć się do przypadku okręgu o środku $(0, 0)$: $x^2 + y^2 = r^2$. Z równania tego mamy $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, więc górna połówka koła zawarta jest pomiędzy odcinkiem $[-r, r]$ a wykresem funkcji $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Tak więc

$$P = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Stosujemy podstawienie $x = r \sin t$, skąd $dx = r \cos t dt$. Ponadto widać, że $x \in [-r, r] \Rightarrow t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mamy więc

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\ &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt. \end{aligned}$$

Teraz wykorzystujemy tożsamość

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

co po podstawieniu do całki daje

$$\begin{aligned} P &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = r^2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2t dt \right) = \pi r^2 + r^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \pi r^2 + r^2 \left(\frac{1}{2} \sin(\pi/2) - \frac{1}{2} \sin(-\pi/2) \right) = \pi r^2. \end{aligned}$$

6) Podać zależność redukcyjną dla całki $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ $n = 0, 1, 2, \dots$

Oznaczamy $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Oczywiście mamy

$$J_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0 x dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}, \quad J_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^1 x dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1. \quad (14)$$

Dla $n \geq 2$ całkujemy przez części

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x (\sin x)' \, dx = (\cos^{n-1} x \sin x)_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\cos^{n-1} x)' \sin x \, dx \\
 &= \cos^{n-1}(\pi/2) \sin(\pi/2) - \cos^{n-1}(0) \sin(0) - \int_0^{\pi/2} (\cos^{n-1} x)' \sin x \, dx = 0 - 0 - (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x (-\sin x) \sin x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n.
 \end{aligned}$$

Mamy więc równość $J_n = (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n$, skąd $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$. Ostatecznie możemy to podsumować

$$\begin{cases} J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}, & n = 2, 3, \dots \\ J_0 = \frac{\pi}{2}, & J_1 = 1. \end{cases} \quad (15)$$

Na przykład

$$\begin{aligned}
 J_4 &= \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx = \frac{3}{4} J_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} J_0 = \frac{3}{8} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16} \pi, \\
 J_5 &= \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx = \frac{4}{5} J_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} J_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{15}, \\
 J_7 &= \frac{6}{7} J_5 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} J_1 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{16}{35}.
 \end{aligned}$$

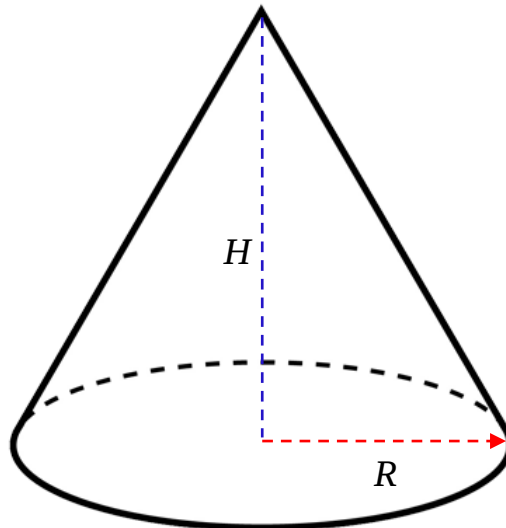
7) Jeżeli przesuwamy po linii prostej ciało działając siłą $F(x)$ od punktu $x = x_1$ do $x = x_2$, gdzie $x_1 < x_2$, to praca wykonana przez tę siłę wynosi $W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \, dx$. Później zobaczymy, że jest to szczególny przypadek ogólnego wyrażenia na pracę $W = \oint_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$ gdzie $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ jest drogą, po której przemieszczało się ciało pod wpływem pola sił $\mathbf{F}$, a kropka $(\cdot)$ oznacza iloczyn skalarny wektorów.

Rozważmy pracę jaką wykonujemy ściskając lub rozciągając sprężynę od położenia równowagi. Przyjmijmy, że sprężyna spełnia prawo Hooke'a i rozciągnięta została o długość ℓ . Dla takiej sprężyny mamy $F(x) = -kx$, gdzie $k > 0$ jest jej sztywnością. Siła którą przykładamy jest przeciwnego znaku, czyli wynosi ona kx . Zatem

$$W = \int_0^{\ell} kx \, dx = k \int_0^{\ell} x \, dx = k \left. \frac{1}{2} x^2 \right|_0^{\ell} = \frac{1}{2} k \ell^2. \quad (16)$$

Możemy ten wynik też zinterpretować następująco: w sprężynie została zgromadzona energia (potencjalna) równa $\frac{1}{2} k \ell^2$.

8) Obliczyć objętość stożka o wysokości H i promieniu podstawy R .



Obliczenie objętości brył trójwymiarowych w ogólności wymaga użycia całek objętościowych. Często jednak (zwłaszcza, gdy bryła posiada jakąś symetrię) można uzyskać objętość wykonując tylko całkowanie funkcji jednej zmiennej. W przypadku stożka zauważamy, że na wysokości h przekrój poprzeczny jest kołem o promieniu

$$r = R(1 - h / H),$$

co wynika z twierdzenia Talesa. Objętość „plasterka” o podstawie r i wysokości dh wynosi

$$dV = 2\pi r^2 dh.$$

Całkujemy teraz te elementarne objętości po $h \in [0, H]$ i korzystamy z wyrażenia na h aby uzyskać pełną objętość

$$\begin{aligned} V &= \int_0^H dV = \int_0^H 2\pi r^2 dh = \int_0^H 2\pi (R(1 - h / H))^2 dh = 2\pi R^2 \int_0^H (1 - h / H)^2 dh = \left\{ \begin{array}{l} s = 1 - h / H \\ ds = -dh / H \end{array} \right\} \\ &= 2\pi R^2 \int_1^0 s^2 (-H ds) = -2\pi R^2 H \int_1^0 s^2 ds = 2\pi R^2 H \int_0^1 s^2 ds = 2\pi R^2 H \left[\frac{1}{3} s^3 \right]_0^1 = 2\pi R^2 H \left[\frac{1}{3} - 0 \right] \quad (17) \\ &= \frac{1}{3} 2\pi R^2 H. \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy znany wynik: **objętość stożka = (1/3) · (pole podstawy) · (wysokość)**.

Zadania

Zad. 1) Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

Zad. 2) Obliczyć pole elipsy, której brzeg dany jest równaniem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Zad. 3) Naszkicować wykres funkcji $y = xe^{-ax}$, gdzie $a > 0$ jest ustalone. Obliczyć pole P_a figury ograniczonej krzywymi $y = xe^{-ax}$, $y = 0$ (czyli chodzi o część leżącą nad przedziałem $[0, \infty)$). Jaka jest granica $\lim_{a \rightarrow \infty} P_a$?

Zad. 4) Obliczyć całki

(a) $\int_{-4}^6 x |x^2 - 3x| dx.$

(b) $\int_{-2}^3 \operatorname{sgn}(x^3 - x) dx.$

(c)* $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$

(d) $\int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$

(e) $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$

Zad. 5) Obliczyć całki oznaczone niewłaściwe

(a) $\int_1^{\infty} \frac{4x}{1+x^4} dx.$

(b) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx, \text{ gdzie } a > 0.$

(c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx, \text{ gdzie } p \in \mathbb{R}.$

(d) $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx, \text{ gdzie } n = 0, 1, 2, \dots$

Zad. 6) Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = \ln x$, osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$, gdzie $0 < a < 1$, $b > 1$.

Zad. 7) Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$, dla $x > 0$, oraz osiami układu współrzędnych. (Wsk. podstawienie $t = \sqrt{x}$).

Zad. 8) Załóżmy, że sprężyna ma charakterystykę progresywną, tak, że jej sztywność rośnie z ugięciem wg zależności $k(x) = k_0 + \alpha x$, gdzie k_0, α są dodatnimi parametrami. Jaka jest energia zgromadzona w sprężynie gdy zostanie ona ugięta o długość ℓ ?

Zad. 9) Ciało masie m , które możemy traktować jako punkt materialny znajduje się w odległości r_0 od środka planety o masie M . Planeta ma kształt kuli o rozkładzie masy jednorodnym, a odległość r_0 jest większa od promienia planety R . Jak zmieni się energia potencjalna tego ciała gdy zostanie ono przemieszczone do innego położenia, którego odległość od środka planety będzie r_1 ?

Wsk. Siła grawitacji działająca na ciało ma postać $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$, gdzie G to uniwersalna stała grawitacji, r – odległość masy m od środka planety, $\hat{\mathbf{r}}$ – wektor jednostkowy (wersor) skierowany od środka planety do masy m .