

DEFINICJA. Funkcją pierwotną (lub całką nieoznaczoną) funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ określonej na zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}$ nazywamy dowolną funkcję różniczkowalną $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $F' = f$.

Oznacza to, że pierwotna spełnia warunek:

$$\forall x \in D \text{ zachodzi } F'(x) = f(x).$$

Pierwotną funkcji f oznaczamy symbolem $\int f(x)dx$.

Na przykład dla $f(x) = x^2$ funkcją pierwotną jest $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, ponieważ

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x).$$

Ale pierwotną funkcji f jest też funkcja $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 7$, czy $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$. Dlatego wynik najczęściej zapisujemy tak

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą. Podkreślamy w ten sposób fakt, że jeżeli do jakiejś pierwotnej dodamy stałą, to również otrzymamy pierwotną.

Można udowodnić następujące fakty:

- 1) Jeżeli $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to posiada pierwotną.
- 2) Jeżeli dziedzina D funkcji jest odcinkiem, to dowolne dwie pierwotne F_1, F_2 funkcji f różnią się o stałą. To znaczy istnieje $C \in \mathbb{R}$ taka, że $F_1(x) - F_2(x) = C$ dla $x \in D$.

WZÓR NA CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

Dane są dwie funkcje f, g , o których zakładamy, że posiadają ciągłe pochodne. Wtedy zachodzi następująca równość

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \quad (1)$$

Wzór ten umożliwia czasami obliczenie całki nieoznaczonej poprzez sprowadzenie jej do innej postaci.

PRZYKŁADY

1) Skorzystamy z pochodnej funkcji e^x : $(e^x)' = e^x$ oraz z tego, że $x' = 1$, aby obliczyć $\int xe^x dx$:

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= \int x(e^x)' dx = xe^x - \int x'e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = \\ &= (x-1)e^x + C. \end{aligned}$$

2) $\int \ln x dx$

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int x' \ln x dx = x \ln x - \int x(\ln x)' dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = \\ &= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.\end{aligned}$$

3) $\int x \sin x dx$

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= \int x(-\cos x)' dx = x(-\cos x) - \int x'(-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= \int x(\sin x)' dx = x \sin x - \int x' \sin x dx \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

4) $\int x^2 \sin x dx$

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x dx &= \int x^2(-\cos x)' dx = x^2(-\cos x) - \int (x^2)'(-\cos x) dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.\end{aligned}$$

5) $\int x^2 \cos x dx$

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= \int x^2(\sin x)' dx = x^2 \sin x - \int (x^2)' \sin x dx = \\ &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + C \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.\end{aligned}$$

6) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \\ &= \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \arctg x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.\end{aligned}$$

Musimy teraz obliczyć całkę $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$. W tym celu wykorzystamy całkowanie przez części:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx &= \int x \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \int x \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right)' dx = -\frac{x}{2(1+x^2)} - \int x' \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctg x + C.\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \arctg x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \arctg x - \left(-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctg x \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \arctg x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C.$$

ZADANIA (Część 1).

Obliczyć podane całki wykorzystując całkowanie przez części.

1) $\int x \sin x dx.$

2) $\int x^2 \ln x dx.$

3) $\int x^3 e^x dx.$

4) $\int \ln^2 x dx.$

5) $\int x^3 \sin x dx.$

6) $\int e^x \sin x dx.$

7) $\int x^2 \sin(5x) dx.$

8) $\int e^{ax} \sin b x dx,$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}.$

9) $\int e^{ax} \cos b x dx,$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}.$

10) $\int e^{ax} \cos b x dx,$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}.$

10) Pokazać, że $\int x^5 \cos x dx = 5(x^4 - 12x^2 + 24) \cos x + (x^5 - 20x^3 + 120x) \sin x + C.$

CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE (CAŁKOWANIE PRZEZ ZAMIANĘ ZMIENNEJ)

W niektórych przypadkach obliczenie całki $\int f(x) dx$ może się uprościć, gdy wprowadzimy pomocniczą zmienną, tzn. zastosujemy podstawienie $x = \varphi(t)$ (lub $t = \varphi(x)$). Stosując formalny rachunek, $dx = \varphi'(t) dt$, mamy następującą równość na całkowanie przez zamianę zmiennej

$$\boxed{\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,} \quad (2)$$

gdzie po obliczeniu całki występującej po prawej stronie, która będzie funkcją zmiennej t , podstawiamy zmienną x wyliczoną z zależności $x = \varphi(t)$.

PRZYKŁADY

1) Obliczyć przez podstawienie całkę $\int x e^{-x^2} dx.$

Zastosujemy podstawienie $t = x^2$. (Można też patrzeć na tę zamianę zmiennej jak na podstawienie $x = \sqrt{t}$. Oba podejścia dają ten sam rezultat końcowy.) Obliczamy

$$dt = (x^2)' dx = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} dt = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt.$$

Mamy teraz

$$\int x e^{-x^2} dx = \int x e^{-t} \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int e^{-t} dt = \frac{1}{2} (-e^{-t}) + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

2) Obliczyć całkę $\int (2 + x^5)^3 x^4 dx$.

Stosujemy podstawienie $2 + x^5 = t$. Mamy $dt = d(2 + x^5) = 5x^4 dx$, zatem

$$\int (2 + x^5)^3 x^4 dx = \int t^3 \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int t^3 dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{20} (2 + x^5)^4 + C.$$

3) Obliczyć całkę $\int \operatorname{tg} x dx$.

Wykorzystamy równość $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ oraz podstawienie $t = \cos x$. Mamy

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = \int \frac{-dt}{t} = -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C.$$

Zauważmy jednak, że zapis $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$ nie jest prawdziwy jeżeli funkcję podcałkową (tangens) rozważamy na jej standardowej dziedzinie

$$\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wynika to stąd, że dziedzina funkcji tangens nie jest odcinkiem, ale sumą rozłącznych odcinków:

$$D_{\operatorname{tg}} = \dots \cup (-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}) \cup (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \cup \dots$$

Oznacza to, że stała C może być inna na każdym z tych odcinków ... no ale wtedy to nie jest stała! Niezauważanie tego faktu może czasami prowadzić do problemów. Natomiast jeżeli funkcję tangens ograniczymy w naszym problemie tylko na przykład do zbioru $(-\pi/2, \pi/2)$, to wtedy zapis

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

będzie ścisły i poprawny. Widać też, że wtedy wartość bezwzględna nie jest potrzebna i mamy w gruncie rzeczy $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

4) Obliczyć całkę $\int \frac{1}{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}} dx$, gdzie α jest dowolną stałą.

Można tę całkę obliczyć następująco:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}} dx &= \int \frac{e^{\alpha x}}{(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})e^{\alpha x}} dx = \int \frac{e^{\alpha x}}{e^{2\alpha x} + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = e^{\alpha x} \\ dt = \alpha e^{\alpha x} dx \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{\alpha} dt}{t^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} e^{\alpha x} + C. \end{aligned}$$

5) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$. Obliczenie tej całki sprowadza się do znanej całki $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$. Ta druga całka wynika oczywiście z pochodnej funkcji *arcus tangens*: $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Całkę przekształcamy tak $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{dx}{a^2 \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right)} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1}$ i stosujemy podstawienie $t = x/a$.

Ponieważ $dx = a dt$, więc

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{a} \arctg t = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C.$$

6) Obliczyć całkę $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

W tym przypadku stosujemy specjalne podstawienie, które całkę typu $\int R(\sin x, \cos x) dx$, gdzie $R(x_1, x_2)$ jest funkcją wymierną (iloraz dwóch wielomianów), sprowadzi do całkowania funkcji wymiernej. Podstawienie to ma postać: $t = \tg \frac{1}{2} x$. Działa ona zawsze w tym sensie, że każda całka z wymiernej funkcji względem $\sin x$ i $\cos x$ zostanie sprowadzona przez to podstawienie do całki z funkcji wymiernej. Ale nie zawsze jest to optymalne podstawienie. W pewnych przypadkach uzyskamy łatwiejsze wyrażenie do całkowania, gdy podstawimy na przykład $t = \tg x$.

Do wykonania podstawienia $t = \tg x$ będą potrzebne pewne tożsamości trygonometryczne, które są wyprowadzone poniżej. Opierają się one na następujących podstawowych tożsamościach trygonometrycznych:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Z powyższych wzorów otrzymujemy wyrażenie na $\tg(\alpha \pm \beta)$:

$$\tg(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\tg \alpha \pm \tg \beta}{1 \mp \tg \alpha \tg \beta}. \quad (4)$$

W szczególności mamy

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{1} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1 - \tg^2 \alpha}{1 + \tg^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Zatem (podstawiając $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}\alpha$) uzyskamy

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{1 - \tg^2 \frac{1}{2} \alpha}{1 + \tg^2 \frac{1}{2} \alpha}}. \quad (5)$$

Podobnie

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (6)$$

Zatem

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}. \quad (7)$$

Ponadto przydatne będą tożsamości

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \\ \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}, (1 - \sin^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (8)$$

Podstawienie $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$ daje

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{1}{2} x}, \\ dx &= 2 \cos^2 \frac{1}{2} x dt = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x} dt = \frac{2 dt}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Ponadto z (6) mamy $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x} = \frac{2t}{1 + t^2}$, zatem

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right| + C,$$

skąd ostatecznie

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right| + C. \quad (9)$$

7) Obliczyć całkę $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Poniżej jest pokazany jeden ze sposobów obliczenia tej całki. Inny sposób jest podany w przykładzie 9.

Stosujemy podstawienie $x = \operatorname{ctg} t$. Mamy $dx = -\frac{1}{\sin^2 t} dt$ oraz

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t} = \sqrt{1+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{1}{\sin t}.$$

Przyjmujemy, że podstawienie jest dla $t \in (0, \pi)$, więc w ostatniej równości nie musimy pisać $|\sin t|$, gdyż funkcja $\sin t$ jest w tym przedziale dodatnia. Mamy więc

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \sin t \frac{-1}{\sin^2 t} dt = -\int \frac{1}{\sin t} dt = -\ln |\operatorname{tg} \frac{1}{2} t| + C. \quad (10)$$

Ostatnia całka jest na podstawie punktu 6) – wzór (9). Musimy jeszcze wrócić do pierwotnej zmiennej x . Formalnie z równości $x = \operatorname{ctg} t$ mamy $t = \operatorname{arccotg} x$ co daje następujące wyrażenie na całkę

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = -\ln |\operatorname{tg}(\frac{1}{2} \operatorname{arccotg} x)| + C,$$

ale wyrażenie pod logarytmem można zapisać prościej. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} t &= \frac{\sin t}{\cos t + 1} = \frac{\sin t}{\cos t + \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} = \frac{1}{\frac{\cos t}{\sin t} + \sqrt{1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{ctg} t + \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t}} = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$

Stąd $-\ln |\operatorname{tg} \frac{1}{2} t| = \ln \frac{1}{|\operatorname{tg} \frac{1}{2} t|} = \ln |x + \sqrt{1 + x^2}|$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + C.$$

Zauważmy jednak, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $x + \sqrt{1+x^2} > 0$, więc w powyższym wzorze można opuścić wartość bezwzględną

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.}$$

8) Niech $k \neq 0$. Pokazać, że

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + C.$$

Należy po prostu zróźniczkować prawą stronę i pokazać, że jest ona równa $\frac{1}{\sqrt{x^2 + k}}$. Korzystamy przy tym z równości:

$$\boxed{(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad \text{dla } x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).} \quad (11)$$

Obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + k}} \frac{d}{dx} (x + \sqrt{x^2 + k}) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + k}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + k}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + k}} \frac{\sqrt{x^2 + k} + x}{\sqrt{x^2 + k}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}}. \end{aligned}$$

9) Obliczyć całkę $\int \sqrt{x^2 + k} dx$, gdzie $k \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą.

Stosujemy podstawienie

$$t = \sqrt{x^2 + k} - x \quad \text{czyli} \quad x + t = \sqrt{x^2 + k}. \quad (12)$$

Przekształcamy

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + k} = x + t &\Rightarrow x^2 + k = (x + t)^2, \quad x^2 + k = x^2 + 2xt + t^2, \quad k = 2xt + t^2, \\ x &= \frac{k}{2t} - \frac{t}{2}, \quad dx = \left(-\frac{k}{2t^2} - \frac{1}{2} \right) dt. \end{aligned}$$

Tak więc

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + k} dx &= \int (x + t) \left(-\frac{k}{2t^2} - \frac{1}{2} \right) dt = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{k}{2t} - \frac{t}{2} + t \right) \left(\frac{k}{t^2} + 1 \right) dt \\ &= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{k}{t} + t \right) \left(\frac{k}{t^2} + 1 \right) dt = -\frac{1}{4} \int \left(\frac{k^2}{t^3} + \frac{2k}{t} + t \right) dt = -\frac{1}{4} \left(-\frac{k^2}{2t^2} + 2k \ln |t| + \frac{1}{2} t^2 \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{k^2}{t^2} - t^2 - 4k \ln |t| \right). \end{aligned}$$

Teraz obliczamy wyrażenie przed logarytmem w nawiasie, podstawiając $t = \sqrt{x^2 + k} - x$:

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{t^2} - t^2 &= \left(\frac{k}{\sqrt{x^2 + k} - x} \right)^2 - (\sqrt{x^2 + k} - x)^2 = \left(\frac{k(\sqrt{x^2 + k} + x)}{(\sqrt{x^2 + k} - x)(\sqrt{x^2 + k} + x)} \right)^2 - (\sqrt{x^2 + k} - x)^2 \\ &= \left(\frac{k(\sqrt{x^2 + k} + x)}{x^2 + k - x^2} \right)^2 - (\sqrt{x^2 + k} - x)^2 = \left(\frac{k(\sqrt{x^2 + k} + x)}{k} \right)^2 - (\sqrt{x^2 + k} - x)^2 \\ &= (\sqrt{x^2 + k} + x)^2 - (\sqrt{x^2 + k} - x)^2 = x^2 + k + 2x\sqrt{x^2 + k} + x^2 - (x^2 + k - 2x\sqrt{x^2 + k} + x^2) = 4x\sqrt{x^2 + k}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \left(\frac{k^2}{t^2} - t^2 - 4k \ln |t| \right) &= \\ \frac{1}{8} \left(4x\sqrt{x^2 + k} - 4k \ln |\sqrt{x^2 + k} - x| \right) &= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + k} - k \ln |\sqrt{x^2 + k} - x| \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Zazwyczaj jeszcze modyfikuje się wyrażenie z logarytmem, wykorzystując znak minus przez nim

$$\begin{aligned}
 -\ln |\sqrt{x^2+k}-x| &= \ln |\sqrt{x^2+k}-x|^{-1} = \ln \frac{1}{|\sqrt{x^2+k}-x|} = \ln \frac{|\sqrt{x^2+k}+x|}{|(\sqrt{x^2+k}-x)(\sqrt{x^2+k}+x)|} \\
 &= \ln \frac{|\sqrt{x^2+k}+x|}{|x^2+k-x^2|} = \ln \frac{|\sqrt{x^2+k}+x|}{|k|} = \ln |\sqrt{x^2+k}+x| + \ln |k| = \ln |\sqrt{x^2+k}+x| + \text{const},
 \end{aligned}$$

a to oznacza, że wyrażenie (13) można zapisać jako $\frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+k} + k \ln |x + \sqrt{x^2+k}| \right) + C$.

Ostatecznie otrzymujemy

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+k} \, dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+k} + k \ln |x + \sqrt{x^2+k}| \right) + C.} \quad (14)$$

10) Obliczyć całkę $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} \, dx$, gdzie $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest ustalonym parametrem.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} \, dx &= \frac{1}{k} \int \frac{x^2+k-x^2}{\sqrt{x^2+k}} \, dx = \frac{1}{k} \left(\int \frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}} \, dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}} \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{k} \left(\int \sqrt{x^2+k} \, dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}} \, dx \right).
 \end{aligned} \quad (15)$$

Pierwsza całkę w nawiasie znamy (wzór (14)), a drugą policzymy przez części.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}} \, dx &= \int x \frac{x}{\sqrt{x^2+k}} \, dx = \int x(\sqrt{x^2+k})' \, dx = x\sqrt{x^2+k} - \int x'\sqrt{x^2+k} \, dx \\
 &= x\sqrt{x^2+k} - \int \sqrt{x^2+k} \, dx.
 \end{aligned}$$

Wstawiamy powyższe wyrażenie do (15), a następnie wykorzystujemy (14)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} \, dx &= \frac{1}{k} \left(\int \sqrt{x^2+k} \, dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}} \, dx \right) = \frac{1}{k} \left(\int \sqrt{x^2+k} \, dx - (x\sqrt{x^2+k} - \int \sqrt{x^2+k} \, dx) \right) \\
 &= \frac{1}{k} \left(2 \int \sqrt{x^2+k} \, dx - x\sqrt{x^2+k} \right) = \frac{1}{k} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+k} + k \ln |x + \sqrt{x^2+k}| \right) - x\sqrt{x^2+k} \right) \\
 &= \frac{1}{k} \left(x\sqrt{x^2+k} + k \ln |x + \sqrt{x^2+k}| - x\sqrt{x^2+k} \right) = \frac{1}{k} \left(k \ln |x + \sqrt{x^2+k}| \right) = \ln |x + \sqrt{x^2+k}|.
 \end{aligned}$$

Tak więc

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} \, dx = \ln |x + \sqrt{x^2+k}| + C, \quad k \neq 0.} \quad (16)$$

ZADANIA (Część 2).

Zad. 1) Korzystając z metody całkowania przez podstawienie, obliczyć podane całki nieoznaczone.

1) $\int x e^{-ax^2} \, dx, \quad a \neq 0.$

2) $\int \operatorname{tg} x \, dx.$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}.$$

$$4) \int x\sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$5) \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$$

$$6) \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$7) \int x(ax^2 + b)^{100} dx.$$

$$8) \int e^{a\sqrt{x}} dx.$$

$$9) \int \frac{3x-1}{2x+5} dx.$$

$$10) \int x \ln \sqrt{1-x} dx.$$

Wskazówki

Ad. 3) Użyć podstawienia $x = t - \frac{1}{2}$, a następnie wykorzystać (16).

Ad. 4) Podstawienie $x = a \sin t$.

Ad. 6) Podstawienie $t = \ln x$.

$$\text{Ad. 9)} \frac{3x-1}{2x+5} = \frac{\frac{3}{2}(2x+5) - \frac{3}{2} \cdot 5 - 1}{2x+5} = \frac{\frac{3}{2}(2x+5) - \frac{17}{2}}{2x+5} = \frac{\frac{3}{2}(2x+5)}{2x+5} - \frac{\frac{17}{2}}{2x+5} = \frac{3}{2} - \frac{17}{2} \frac{1}{2x+5}.$$

Ad. 10) $\ln \sqrt{1-x} = \ln(1-x)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln(1-x)$. Mamy wtedy $\int x \ln \sqrt{1-x} dx = \frac{1}{2} \int x \ln(1-x) dx$. Zatem:

$$\begin{aligned} \int x \ln(1-x) dx &= \int \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \ln(1-x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(1-x) - \int \left(\frac{1}{2} x^2 \right) (\ln(1-x))' dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(1-x) - \int \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \left(\frac{-1}{1-x} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(1-x) + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1-x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(1-x) + \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1 + 1}{1-x} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(1-x) + \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1}{1-x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(1-x) + \frac{1}{2} \int \frac{(x-1)(x+1)}{1-x} dx - \frac{1}{2} \ln(1-x) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(1-x) - \frac{1}{2} \int x+1 dx - \frac{1}{2} \ln(1-x) = (x^2 - 1) \ln \sqrt{1-x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x + C, \end{aligned}$$

skąd

$$\int x \ln \sqrt{1-x} dx = \frac{1}{2} \int x \ln(1-x) dx = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln \sqrt{1-x} - \frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{4} x + C.$$

Całkę $\int x \ln(1-x) dx$ można też obliczyć nieco prościej podstawiając $t = 1-x$:

$$\begin{aligned} \int x \ln(1-x) dx &= \int (1-t) \ln t (-dt) = \int (t-1) \ln t dt = \int \left(\frac{1}{2} t^2 - t \right)' \ln t dt = \left(\frac{1}{2} t^2 - t \right) \ln t - \int \left(\frac{1}{2} t^2 - t \right) (\ln t)' dt \\ &= \left(\frac{1}{2} t^2 - t \right) \ln t - \int \left(\frac{1}{2} t^2 - t \right) \frac{1}{t} dt = \left(\frac{1}{2} t^2 - t \right) \ln t - \int \left(\frac{1}{2} t - 1 \right) dt = \left(\frac{1}{2} t^2 - t \right) \ln t - \frac{1}{4} t^2 + t + C \\ &= \left(\frac{1}{2} (1-x)^2 - 1+x \right) \ln(1-x) - \frac{1}{4} (1-x)^2 + 1-x + C = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln(1-x) - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x + C + \frac{3}{4} \\ &= (x^2 - 1) \ln \sqrt{1-x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x + C, \end{aligned}$$

gdzie $C + \frac{3}{4}$ oznaczone zostało jako C (dowolna stała).

Zad. 2) Całka $\int \sqrt{x^2 + k} dx$ została obliczona (w przykładach powyżej) dla dowolnego $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (por. (14)). Co otrzymamy, gdy podstawimy do tej całki takie $k = 0$?

Ale całka $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx$ (wyrażenie (16)) jest obliczona przy założeniu, że $k \neq 0$. Czy jest ono konieczne? W którym miejscu wyprowadzenia tej całki korzystamy z założenia $k \neq 0$. Co otrzymamy, gdy podstawimy do wzoru (16) $k = 0$?

Zad. 3) Obliczyć całkę $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ stosując podstawienie $x^2 = t$.

Zad. 4) Obliczyć całkę $\int \arcsin x dx$ stosując w pierwszym kroku całkowanie przez części ($x' = 1$), a następnie podstawienie $1 - x^2 = t^2$.