

Pierwsze trzy zajęcia będą poświęcone na **przypomnienie i powtórkę** materiału z matematyki, który studenci **znają** z poprzednich kursów. Dlatego ilościowo będzie tego całkiem sporo – bo to nie jest nowy materiał.

Fragmenty na żółtym tle są nieobowiązkowe.

Część I: Granice funkcji, pochodne funkcji jednej zmiennej. Reguła de l'Hôspitala

DEFINICJA. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na odcinku $D \subset \mathbb{R}$. Jeżeli dla ustalonego punktu $x_0 \in D$ istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (1)$$

to mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 . Granicę tę oznaczamy przez $f'(x_0)$ i nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 . Tak więc z definicji (1) mamy

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (2)$$

Wprowadzając oznaczenie $h = x - x_0$ możemy granicę, która występuje w (2) zapisać następująco

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3)$$

Jeżeli pochodna istnieje w każdym punkcie $x \in D$, to mamy określoną funkcję $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$, która każdemu elementowi dziedziny $x \in D$ przyporządkowuje pochodną $f'(x)$. Funkcję f' nazywamy pochodną funkcji f .

Oczywiście nie każda funkcja jest różniczkowalna, ale większość funkcji spotykanych w zastosowaniach posiada pochodną. Mamy ponadto prostą zależność pomiędzy ciągłością a różniczkowalnością funkcji:

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest też w nim ciągła.

Odwrotna implikacja nie zachodzi, o czym świadczy prosty przykład $f(x) = |x|$, dla $x \in \mathbb{R}$. Funkcja ta jest ciągła w $x_0 = 0$, gdyż $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0)$, ale $f'(0)$ nie istnieje, bo granice jednostronne

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1. \end{aligned}$$

są różne. Skoro granica prawostronna jest różna od lewostronnej, to granica nie istnieje, czyli nie istnieje pochodna funkcji $|x|$ w zerze. Ale warto podkreślić, że poza zerem ta pochodna istnieje:

$$\text{dla } x > 0 \text{ zachodzi: } |x'| = x' = 1,$$

$$\text{dla } x < 0 \text{ zachodzi: } |x'| = (-x') = -1.$$

TWIERDZENIE. Niech funkcja $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ będą różniczkowalne w punkcie $x \in D$. Wtedy funkcje $f + g$, fg , f/g są różniczkowalne w punkcie x oraz zachodzą równości

- a) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

W punkcie c) zakładamy, że $g(x) \neq 0$.

POCHODNA FUNKCJI ZŁOŻONEJ

W wielu przypadkach jednak nie wystarczy posługiwanie się powyższymi tożsamościami do obliczenia pochodnej. Na przykład dla funkcji $\sin(x^3 + 2x)$ obliczenie pochodnej – mimo, że potrafimy obliczyć pochodną $\sin' x = \cos x$ oraz $(x^3 + 2x)' = 3x^2 + 2$ – w oparciu tylko o wzory a), b) i c) nie jest możliwe. Musimy jeszcze posłużyć się wzorem na *pochodną funkcji złożonej*. Poniższe twierdzenie przedstawia ten wzór.

TWIERDZENIE. Niech $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi. Ponadto zakładamy, że złożenie $g \circ f$ jest poprawnie określone, tj. $f(D) \subset G$. Wtedy funkcja $g \circ f$ jest też różniczkowalna i zachodzi równość

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \text{ dla } x \in D. \quad (4)$$

Pisząc nieco mniej formalnie wzór (4) na pochodną funkcji złożonej zapisujemy też tak

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x). \quad (5)$$

PRZYKŁADY

- a) Obliczyć pochodną funkcji $\sin(x^3 + 2x)$.

Zauważmy, że $\sin(x^3 + 2x) = g(f(x))$, gdzie $g(x) = \sin x$, $f(x) = x^3 + 2x$. Zatem

$$\begin{aligned} (\sin(x^3 + 2x))' &= \sin'(x^3 + 2x) \cdot (x^3 + 2x)' = \\ &= \cos(x^3 + 2x) \cdot (3x^2 + 2) = (3x^2 + 2)\cos(x^3 + 2x). \end{aligned}$$

- b) Obliczyć pochodną funkcji $\sqrt[3]{\ln x}$.

Mamy $\sqrt[3]{\ln x} = g(f(x))$, gdzie $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = \ln x$. Zatem

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{\ln x})' &= (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{3}(\ln x)^{-2/3} \cdot (\ln x)' = \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{\ln^2 x}} \frac{1}{x} = \frac{1}{3x\sqrt[3]{\ln^2 x}}. \end{aligned}$$

- c) Obliczyć pochodną funkcji $e^{\sqrt{\cos x + 2x^3}}$.

Zauważmy, że pochodna funkcji zewnętrznej, e^x , pokrywa się z nią samą: $\frac{d}{dx} e^x = e^x$. Zatem

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} e^{\sqrt{\cos x} + 2x^3} &= e^{\sqrt{\cos x} + 2x^3} \cdot \frac{d}{dx} (\sqrt{\cos x} + 2x^3) = e^{\sqrt{\cos x} + 2x^3} \left(\frac{d}{dx} \sqrt{\cos x} + \frac{d}{dx} 2x^3 \right) = \\ &= e^{\sqrt{\cos x} + 2x^3} \left(\frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \frac{d}{dx} \cos x + 2 \cdot 3x^2 \right) = e^{\sqrt{\cos x} + 2x^3} \left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} + 6x^2 \right).\end{aligned}$$

REGUŁA DE L'HÔSPITALA

Przy obliczaniu granic funkcji możemy posłużyć się pochodnymi stosując tzw. *regułę de l'Hôspitala*.

Sama reguła bezpośrednio dotyczy tak zwanych *symboli nieoznaczonych* $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Inne przypadki, np.

$0 \cdot \infty$, 1^∞ , $\infty - \infty$, można sprowadzić do poprzednich dwóch.

Niech $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi, a x_0 niech będzie punktem skupienia dziedziny D . Wtedy:

a) Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ oraz istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (6)$$

b) Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ oraz istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (7)$$

Jak widzimy ze wzorów (6) i (7) reguła de l'Hôspitala pozwala zamienić obliczanie granicy wyrażenia $f(x)/g(x)$ do innego wyrażenia. Użyteczność tej reguły bierze się stąd, że często to drugie wyrażenie jest prostsze (pod względem obliczania granicy).

Przykłady

1) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, więc możemy stosować regułę de l'Hôspitala:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

2) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, więc możemy stosować regułę de l'Hôspitala:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

3) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x}$. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \operatorname{tg} x) = 0 - 0 = 0$ i $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0 - 0 = 0$, więc możemy stosować regułę de l'Hôspitala:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{tg} x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x(1 - \cos x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x} = -\frac{2}{1} = -2.$$

- 4) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$, więc możemy stosować regułę de l'Hôspitala. Będziemy ją stosowali dwukrotnie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

- 5) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - \sqrt[m]{x}}$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$. Możemy stosować regułę de l'Hôspitala, gdyż

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - \sqrt[n]{x}) = \lim_{x \rightarrow 1} (1 - \sqrt[m]{x}) = 0:$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - \sqrt[m]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt[n]{x})'}{(1 - \sqrt[m]{x})'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{1/n})'}{(x^{1/m})'} = \frac{m}{n} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{n-1}{n}}}{x^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m}{n}.$$

W przypadku tej granicy można trochę sobie ułatwić obliczenia stosując zamianę zmiennych $x = t^{n \cdot m}$, zanim wykorzystamy regułę de l'Hôspitala. Mamy wtedy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - \sqrt[m]{x}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{t^{nm}}}{1 - \sqrt[m]{t^{nm}}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - t^m}{1 - t^n} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1 - t^m)'}{(1 - t^n)'} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{0 - mt^{m-1}}{0 - nt^{n-1}} = \frac{m}{n} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{m-1}}{t^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m}{n}.$$

Zauważmy też, że granicę $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - t^m}{1 - t^n}$ możemy łatwo obliczyć bez obliczania pochodnych i stosowanie reguły de l'Hôspitala. Wystarczy tylko dokonać rozkładu wielomianów. Mamy bowiem:

$$1 - x^k = (1 - x)(1 + x + \dots + x^{k-1}),$$

zatem

$$\frac{1 - t^n}{1 - t^m} = \frac{(1 - t)(1 + t + \dots + t^{n-1})}{(1 - t)(1 + t + \dots + t^{m-1})} = \frac{1 + t + \dots + t^{n-1}}{1 + t + \dots + t^{m-1}} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \frac{\overbrace{1 + 1 + \dots + 1}^{n \text{ razy}}}{\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m \text{ razy}}} = \frac{n}{m}.$$

- 6) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$. Granica ta jest typu $0 \cdot \infty$, więc aby móc stosować regułę musimy zamienić ją na ∞ / ∞ lub $0 / 0$. Na przykład $x \ln x = (\ln x) / (1/x)$ i jest to symbol nieoznaczony typu ∞ / ∞ , zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

7) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$. Granica ta jest typu 0^0 – jest to kolejny typ symbolu nieoznaczonego. Aby

zamienić go na problem $0 \cdot \infty$ wykorzystamy logarytm naturalny następująco $x = e^{\ln x}$. Mamy zatem

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}.$$

Pokazaliśmy już poprzednio, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, zatem $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$.

8) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\sqrt{x}}$. Z poprzedniego punktu wiemy, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$, zatem $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x - 1) = 0$.

Mamy więc symbol nieoznaczony $0/0$. Obliczamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x^2} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{x \ln x} - 1)'}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} (x \ln x)'}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \frac{\ln x + 1}{2x} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 1}{x}. \end{aligned}$$

Pierwszą granicę już obliczyliśmy, więc $\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, natomiast druga granica jest postaci $-\infty \cdot 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((1 + \ln x) \cdot \frac{1}{x} \right) = -\infty \cdot \infty = \infty.$$

i ostatecznie $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty$.

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \ln(x+1))'}{(x \ln(x+1))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{(x+1)\ln(x+1) + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x+1)\ln(x+1) + x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x+1) + 1 + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x+1) + 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

10) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{(2x - \pi)^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{(2x - \pi)^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(\ln(\sin x))'}{((2x - \pi)^2)'} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2 \cdot 2 \cdot (2x - \pi)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{4 \sin x} \frac{\cos x}{2x - \pi} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{4 \sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{2x - \pi} = \frac{1}{4 \sin(\pi/2)} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{2x - \pi} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{2x - \pi} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\sin x}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

11) $\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\ln(\cos \alpha)}$

Zauważmy, że powyższa granica nie jest w ogóle poprawnie określona gdyż funkcja $\ln \cos \alpha$ nie jest zdefiniowana dla $\alpha > \pi/2$. Wynika to stąd, że $\cos \alpha < 0$ dla $\pi/2 < \alpha < \pi$. Dlatego możemy tylko obliczać granicę lewostronną:

$$\lim_{\alpha \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\ln(\cos \alpha)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{\alpha \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{1}{-\sin \alpha \cos \alpha} = -1 \cdot \frac{1}{0^+} = -\infty.$$

Zauważmy, też że gdybyśmy mechanicznie zastosowali regułę dla granicy prawostronnej, to uzyskalibyśmy błędny wynik:

$$\lim_{\alpha \rightarrow (\pi/2)^+} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\ln(\cos \alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow (\pi/2)^+} \frac{1}{-\sin \alpha \cos \alpha} = -1 \cdot (-\infty) = \infty.$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \frac{\cos x}{\sin x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right],$$

ale nie stosujemy w teraz od razu de l'Hôspitala, gdyż wyrażenie się komplikuje. Lepiej jest jeszcze nieco przekształcić (pogrupować) i dopiero wtedy stosować regułę:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}}_1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^2)} = \left[0^0 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^2 \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x}. \text{ Wystarczy obliczyć granicę w wykładniku:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-2} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0.$$

$$\text{Tak więc } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^2)} = e^0 = 1.$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} (e^x - \cos x)}{x + 2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} (e^x - \cos x)}{x + 2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - \cos x)}{x + 2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \cos x}{\sin x}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - \cos x)}{x + 2\sqrt{x}}.$$

Pierwszy składnik

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0,$$

Drugi składnik

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - \cos x)}{x + 2\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \sin x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1+0}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

INNE OZNACZENIA POCHODNEJ

Nie zawsze oznaczenie pochodnej symbolem prim (') jest wygodne. Wzory fizyko-chemiczne często zawierają wiele parametrów względem których może być wykonywane różniczkowanie. Wtedy wygodniej jest używać takiego oznaczenia na pochodną, które wyraźnie podkreśla względem której zmiennej różniczkujemy. Mamy zatem oznaczenie

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Przykłady

Równanie Arrheniusa – opisuje zależność stałej szybkości reakcji od temperatury

$$k = A \cdot e^{-E_a/RT}.$$

Oczywiście określenie „stała” jest tutaj konwencjonalną nazwą tej wielkości używaną w chemii. Matematycznie funkcja ta nie jest funkcją stałą – wyraźnie widać przecież, że zależy od T .

Pochodna tej stałej szybkości względem temperatury wynosi

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dT} &= \frac{d}{dT} k = \frac{d}{dT} (A \cdot e^{-E_a/RT}) = A \frac{d}{dT} e^{-E_a/RT} = A e^{-E_a/RT} \frac{d}{dT} \frac{-E_a}{RT} = \\ &= A e^{-E_a/RT} \frac{-E_a}{R} \frac{d}{dT} \frac{1}{T} = A e^{-E_a/RT} \frac{-E_a}{R} \frac{-1}{T^2} = \frac{E_a}{RT^2} A e^{-E_a/RT} = \frac{E_a}{RT^2} k. \end{aligned}$$

Szybkość korozji i opór polaryzacji – w zagadnieniach korozji metali ważna jest tzw. gęstość prądu korozyjnego, j_{corr} (oznaczanego także jako i_{corr}) oraz powiązanego z nim oporu polaryzacji, R_p . Można go wyznaczyć ze wzoru Stearn-Geary'a

$$R_p = B / i_{corr},$$

gdzie B jest ważnym parametrem, który daje się wyrazić przy pomocy współczynników Tafela b_a , b_c oraz b_c wzorem: $B = b_a b_c / 2,303(b_a + b_c)$. Stearn i Geary wyprowadzili ten wzór wykorzystując definicję R_p :

$$R_p = \left(\frac{dE}{dI} \right)_{E_{corr}}, \quad (8)$$

oraz wersję wzoru Butlera–Volmera (krzywa polaryzacji elektrodowej – zależność gęstości prądu od nadpotencjału) dla elektrody korodującej¹

$$j = j_{corr} \left(e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} - e^{-\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \right), \quad (9)$$

gdzie E – potencjał elektrody, E_{corr} – tzw. potencjał korozyjny, T – temperatura (K), a R i F to stała gazowa i stała Faradaya.

Policzmy zatem pochodną $\frac{dj}{dE}$:

$$\begin{aligned} \frac{dj}{dE} &= \frac{d}{dE} j_{corr} \cdot \left(e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} - e^{-\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \right) = j_{corr} \cdot \left(\frac{d}{dE} e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} - \frac{d}{dE} e^{-\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \right) = \\ &= j_{corr} \cdot \left(e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} \frac{d}{dE} \frac{F}{RTb_a} (E-E_{corr}) - e^{-\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \frac{d}{dE} \frac{-F}{RTb_c} (E-E_{corr}) \right) = \\ &= j_{corr} \cdot \left(e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} \frac{F}{RTb_a} \frac{d}{dE} (E-E_{corr}) - e^{-\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \frac{-F}{RTb_c} \frac{d}{dE} (E-E_{corr}) \right) = \\ &= \frac{j_{corr} F}{RT} \left(e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} \frac{1}{b_a} + e^{-\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \frac{1}{b_c} \right). \end{aligned}$$

Do tak obliczonej pochodnej wstawiamy teraz $E = E_{corr}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dj}{dE} \right)_{E_{corr}} &= \frac{j_{corr} F}{RT} \left(e^{\frac{F}{RTb_a}(E-E_{corr})} \frac{1}{b_a} + e^{-\frac{F}{RTb_c}(E-E_{corr})} \frac{1}{b_c} \right) \Bigg|_{E=E_{corr}} = \frac{j_{corr} F}{RT} \left(e^0 \frac{1}{b_a} + e^{-0} \frac{1}{b_c} \right) = \\ &= \frac{j_{corr} F}{RT} \left(\frac{1}{b_a} + \frac{1}{b_c} \right) = \frac{j_{corr} F}{RT} \frac{b_a + b_c}{b_a b_c}. \end{aligned}$$

Wracając do wzoru (8) otrzymujemy R_p

$$R_p = \frac{dE}{dj} \Bigg|_{E_{corr}} = \frac{1}{\frac{dj}{dE} \Big|_{E_{corr}}} = \frac{1}{\frac{j_{corr} F}{RT} \frac{b_a + b_c}{b_a b_c}} = \frac{RT}{F} \frac{b_a b_c}{b_a + b_c} \Rightarrow \boxed{B = \frac{RT}{F} \frac{b_a b_c}{b_a + b_c}}$$

Część II: Szereg Taylora dla funkcji jednej zmiennej

Wzór Taylora jest jednym z ważniejszych twierdzeń rachunku różniczkowego. Pozwala on dostatecznie regularną funkcję przybliżać lokalnie wielomianem: jeżeli funkcja jest n – krotnie różniczkowalna w otoczeniu ustalonego punktu x_0 , to można ją „dobrze” aproksymować przy pomocy odpowiednio

¹ Por. A. Kisa, „Elektrochemia cz. II Elektrodyka”, WNT, 2001, (str. 105, 303).

dobranego wielomianu (stopnia nie większego niż n). Ponadto wzór ten daje możliwość określenia błędu z jakim ta aproksymacja jest uzyskana. Istnieje wiele wersji wzoru Taylora, które różnią się sposobem opisanego tego błędu, zwanego *resztą*, natomiast wielomian aproksymujący jest zawsze takiej samej postaci. Najczęściej używa się wzoru Taylora z *resztą Lagrange'a* lub z *resztą Cauchy'ego*. W obu tych przypadkach reszta jest wyrażona w postaci różniczkowej. Istnieje też wersja wzoru Taylora, w której reszta jest w postaci całkowej.

WZÓR TAYLORA Z RESZTĄ LAGRANGE'A. Jeżeli $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest n -krotnie różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz n -ta pochodna jest ciągła, to dla dowolnych $x_0, x_0 + h \in (a, b)$ zachodzi

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)h^{n-1} + R_n(x_0, h), \quad (10)$$

gdzie reszta $R(x_0, h)$ ma postać

$$R_n(x_0, h) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h)h^n \quad (11)$$

dla pewnego $0 < \vartheta < 1$ zależnego na ogół od x_0 oraz h .

Wzór Taylora (10) z wyrażeniem na resztę (11) interpretujemy tak: jeżeli funkcja jest „dostatecznie regularna”, to można ją przybliżać wielomianem odpowiedniego stopnia, przy czym błąd przybliżenia jest rzędu h^n . W praktyce inżynierskiej resztę się pomija pisząc po prostu:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)h^{n-1}. \quad (12) \sim$$

Niekiedy wzór Taylora zapisujemy nieco inaczej: zamiast $x_0 + h$ używamy $x = x_0 + h$. Wtedy $h = x - x_0$ i wzór (10) można przepisać tak

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1} + R_n(x_0, x), \quad (13)$$

gdzie reszta (Lagrange'a) ma postać

$$R_n(x_0, x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))(x - x_0)^n. \quad (14)$$

Gdy pominiemy resztę („bo jest mała”), to z (13) mamy

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1} \quad (15)$$

Przy ustalonym punkcie x_0 występujące w tym wzorze współczynniki $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0)$ są stałymi, zatem wyrażenie po prawej stronie jest po prostu wielomianem (zmiennej x) co najwyżej stopnia n .

Wzór Maclaurina

Jest to szczególny przypadek wzoru Taylora – podstawiamy w (13) $x_0 = 0$, czyli rozwijamy funkcję wokół punktu 0. Otrzymujemy wyrażenie

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)x^{n-1} + \dots \quad (16)$$

Przykład. Niech $f(x) = \sin x$. Podać wzór Taylora w punkcie $x_0 = 0$ dla $n = 4$.

Rozwiązanie: Obliczamy kolejne pochodne:

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x, \quad f^{(2)}(x) = (\cos x)' = -\sin x,$$

$$f^{(3)}(x) = (-\sin x)' = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = \sin x,$$

$$f^{(5)}(x) = (\sin x)' = \cos x, \quad f^{(6)}(x) = (\cos x)' = -\sin x.$$

Mamy $f(0) = 0$, $f^{(1)}(0) = 1$, $f^{(2)}(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$, więc

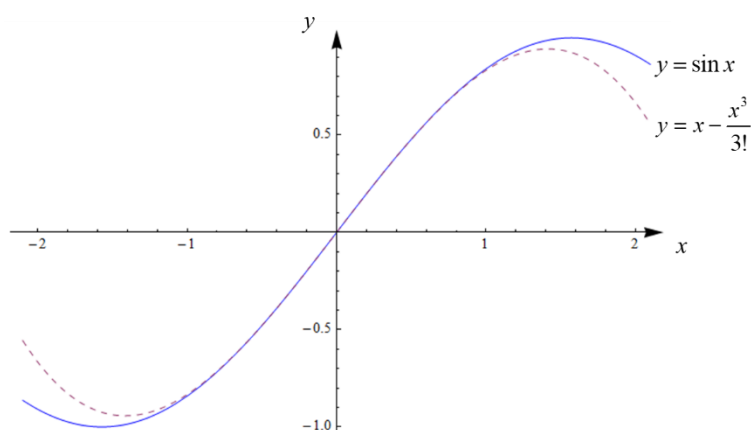
$$\sin(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + R_5(x),$$

czyli $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R(x)$, gdzie $R(x) = \frac{1}{4!} \sin(\theta x)x^4$. Pomijając resztę, która „jest mała” otrzymujemy następujące przybliżenie dla funkcji $\sin x$ w otoczeniu zera ($x_0 = 0$):

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

To ile składników wielomianu Taylora będziemy brali do przybliżenia danej funkcji w zastosowaniach zależy od potrzebnej dokładności. Np. może wystarczyć jeden lub dwa pierwsze:

$$\sin x \approx x, \quad \sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3.$$



Rys. 1. Wykresy funkcji $y = \sin x$ oraz $y = x - x^3/3!$ na przedziale $[-2, 2]$.

Łatwo zauważyć ogólny wzór na rozwinięcie funkcji sinus, w którym występują tylko nieparzyste potęgi względem x :

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} \dots \quad (17)$$

Przykład. Zapisać wzór Taylora (13) dla funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ w otoczeniu $x_0 = 0$. Podać $n = 5$ wyrazów rozwinięcia. Uogólnić na przypadek dowolnego n i zapisać szereg Maclaurina.

Rozwiązanie: Zauważmy, że funkcja $f(x) = \ln(1+x)$ jest określona dla $x \in (-1, \infty)$, więc podane rozwinięcie będzie prawdziwe dla wszystkich $x > -1$. Podstawą jest oczywiście znajomość pochodnej funkcji logarytm. Ponieważ $(\ln x)' = 1/x$, zatem

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5},$$

czyli

$$f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = 1 \cdot 2, \quad f^{(4)}(0) = -1 \cdot 2 \cdot 3, \quad f^{(5)}(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

Możemy to przedstawić następująco

$$f^{(1)}(0) = 0!, \quad f^{(2)}(0) = -1!, \quad f^{(3)}(0) = 2!, \quad f^{(4)}(0) = -3!, \quad f^{(5)}(0) = 4!,$$

skąd wnioskujemy, że ogólnie $f^{(k)}(0) = (-1)^k (k-1)!$, więc

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = (-1)^k \frac{(k-1)!}{k!} = (-1)^k \frac{(k-1)!}{(k-1)!k} = \frac{(-1)^k}{k}.$$

Ostatecznie

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \dots$$

Przykład. Podać rozwinięcie Maclaurina dla funkcji $f(x) = e^x$.

Rozwiązanie: Musimy policzyć pochodne funkcji, co w tym przypadku jest łatwe, gdyż $(e^x)' = e^x$.

Zatem $f^{(n)}(x) = e^x$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$, więc $f^{(n)}(0) = 1$. Wzór Maclaurina (16) daje teraz

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots$$

Przykład. Rozwinąć w szereg Taylora funkcję tangens wokół zera.

Rozwiązanie: dla $f(x) = \operatorname{tg} x$ mamy

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}, \quad f'''(x) = \frac{2(2 - \cos 2x)}{\cos^4 x}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{4(5 - \cos 2x) \sin x}{\cos^5 x},$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{16 + 88 \sin^2 x + 16 \sin^4 x}{\cos^6 x}, \quad f^{(6)}(x) = \frac{16(2(3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x) \sin^2 x + 11(3 \sin^2 x + \cos^2 x)) \sin x}{\cos^7 x},$$

$$f^{(7)}(x) = \dots?$$

skąd dla $x = 0$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 16, \quad f^{(6)}(0) = 0, \quad f^{(7)}(0) = 272, \dots$$

co daje

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \frac{272}{7!}x^7 + R_8 = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + O(x^8) \quad (18)$$

dla $|x| < \pi/2$. Zapis $O(x^8)$ oznacza, że błąd jest co najwyżej rzędu x^8 . May więc

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7. \quad (19)$$

Uwaga. W przypadku funkcji tangens pełne rozwinięcie w szereg Taylora nie ma już tak prostej postaci jak np. dla funkcji $\sin$, $\cos$, $\ln$ czy $\exp$. Ogólna postać rozwinięcia dla tangens (uogólnienie wzoru (18)) można wyrazić przy pomocy tzw. liczb Bernoulliego (B_n), które pojawiają się w innych działach matematyki (teoria liczb, kombinatoryka, teoria rozwinięć asymptotycznych,...). Szereg Maclaurina dla funkcji tangens zapisany przy pomocy liczb Bernoulliego ma postać

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} \quad \text{dla } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad (20)$$

Granice funkcji a szereg Taylora

Granice funkcji w punkcie możemy obliczać stosując rozwinięcie w szereg Taylora. Czasami jest to wygodniejszy sposób niż stosowanie reguły de L'Hôpitala.

Przykład. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x^3}-1}$.

Rozwiązanie. Widać, że jest to granica 0/0. Nie będziemy stosować reguły de L'Hôpitala, ale wykorzystamy rozwinięcia w szereg Taylora:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \dots \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right)x^2 + \dots = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots \end{aligned}$$

Podstawiając w pierwszym $x \rightarrow x^2$, a w drugim $x \rightarrow x^3$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \ln(1+x^2) &= x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \dots \\ \sqrt{1+x^3} &= 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \dots \end{aligned}$$

Wyrażenia te wstawiamy do naszego przykładu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x^3}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \dots \right)}{1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \dots - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots \right)}{x^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^3 + \dots \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots}^0}{\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^3 + \dots}_0} = 2.$$