

Pochodna funkcji jednej zmiennej

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ posiada *pochodną* w punkcie $x \in (a, b)$, gdy istnieje granica ilorazu różnicowego:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1)$$

Mówimy też wtedy, że funkcja f jest *różniczkowalna* w punkcie x .

Przykłady

Niech $f(x) = x^2$. Obliczyć z definicji $f'(x)$.

Rozwiązanie

Sprawdźmy zatem, czy istnieje powyższa granica dla funkcji $f(x) = x^2$. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h. \end{aligned}$$

Tak więc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

Oznacza to, że funkcja $f(x) = x^2$ ma pochodną w każdym punkcie, i $f'(x) = 2x$. Inaczej mówiąc, funkcja jest różniczkowalna w całej swojej dziedzinie.

Niech $f(x) = ax^3$. Obliczyć z definicji $f'(x)$.

Rozwiązanie

Podobnie jak w zadaniu poprzednim musimy zbadać granicę ilorazu różnicowego

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{a(x+h)^3 - ax^3}{h} = \frac{a(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - ax^3}{h} = \\ &= a \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = a(3x^2 + 3xh + h^2). \end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a(3x^2 + 3xh + h^2) = 3ax^2,$$

co oznacza, że $f'(x) = 3ax^2$.

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$. Obliczyć z definicji jej pochodną.

Rozwiązanie

Podobnie jak w zadaniu poprzednim musimy zbadać granicę ilorazu różnicowego

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \\ &= \frac{-h}{x(x+h)} \cdot \frac{1}{h} = -\frac{1}{x(x+h)} \rightarrow -\frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

Oznacza to, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ ma pochodną w każdym punkcie dziedziny, i $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Dana jest funkcja $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \sqrt{x}$. Obliczyć z definicji jej pochodną w dowolnym punkcie dziedziny.

Rozwiązanie

Niech $x \in (0, \infty)$. Iloraz różnicowy ma postać

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \\ &= \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Tak więc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

czyli $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dla $x \in (0, \infty)$. Natomiast dla $x = 0$, który jest punktem brzegowym dziedziny

możemy mówić tylko o pochodnej jednostronnej (w tym przypadku o pochodnej prawostronnej).

Pochodna ta jednak nie istnieje, bo powyższy iloraz wtedy ma postać

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{0+h} + \sqrt{0}} = \frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow \infty,$$

co oznacza, że granica jest niewłaściwa.

Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x}$ jest różniczkowalna w $x = 0$?

Rozwiązanie

Musimy sprawdzić, czy istnieje granica ilorazu różnicowego przy $h \rightarrow 0$:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h}.$$

Ale widzimy, że $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$. Ponieważ granica właściwa (czyli liczba) nie istnieje, to funkcja $f(x) = \sqrt[3]{x}$ nie jest różniczkowalna w zerze.

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = |x|^3$. Z badać różniczkowalność tej funkcji.

Rozwiązanie

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{|x+h|^3 - |x|^3}{h}.$$

Ponieważ w powyższym ilorazie różnicowym występuje wartość bezwzględna, więc najlepiej będzie rozważyć przypadki, tak aby można było się jej pozbyć.

Przypadek 1: $x > 0$.

Dla dostatecznie bliskich zeru h można iloraz zapisać następująco

$$\begin{aligned} \frac{|x+h|^3 - |x|^3}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \rightarrow 3x^2. \end{aligned}$$

Tak więc dla $x > 0$ pochodna $f'(x) = 3x^2$.

Przypadek 2: $x < 0$.

Dla dostatecznie bliskich zeru h mamy wtedy $|x+h| = -(x+h)$. Zatem

$$\begin{aligned} \frac{|x+h|^3 - |x|^3}{h} &= \frac{(-x-h)^3 - (-x)^3}{h} = \frac{-x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3 + x^3}{h} = \\ &= \frac{-3x^2h - 3xh^2 - h^3}{h} = -3x^2 - 3xh - h^2 \rightarrow -3x^2. \end{aligned}$$

Tak więc dla $x < 0$ pochodna $f'(x) = -3x^2$.

Przypadek 3: $x = 0$.

Iloraz różnicowy ma teraz postać

$$\frac{|x+h|^3 - |x|^3}{h} = \frac{|0+h|^3 - |0|^3}{h} = \frac{|h|^3}{h} = \frac{|h|^2|h|}{h} = \frac{h^2|h|}{h} = h|h| \rightarrow 0.$$

Wykorzystaliśmy oczywistą równość $|h|^2 = h^2$. Tak więc $f'(0) = 0$.

Możemy teraz podsumować te wzory następująco

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ -3x^2 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Gdy się dokładniej przyjrzymy powyższemu wzorowi, to dojdziemy do wniosku, że można go zapisać jednym wyrażeniem: $f'(x) = 3x|x|$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \geq 1, \\ ax + 1 - a & \text{dla } x < 1. \end{cases}$$

Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ istnieje pochodna $f'(1)$?

Rozwiązanie

Policzymy pochodne jednostronne (o ile istnieją) $f'(1^+)$ i $f'(1^-)$, a następnie skorzystamy z warunku, że istnieje pochodna $f'(1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(1^+) = f'(1^-)$. Tak więc

$$f'(1^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h},$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, że $h > 0$, więc $f(1+h) = (1+h)^2$. Mamy zatem

$$f'(1^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (2 + h) = 2.$$

Teraz policzymy $f'(1^-)$

$$f'(1^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{a(1+h) + 1 - a - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{a + ah - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} a = a.$$

Aby istniała pochodna musi być $f'(1^+) = f'(1^-)$, czyli $a = 2$. Ostatecznie mamy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \geq 1, \\ 2x - 1 & \text{dla } x < 1, \end{cases}$$

a pochodna $f'(1) = 2$.

Własności pochodnych

Twierdzenie. Jeżeli f, g są różniczkowalne w x , to

- 1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- 2) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- 3) dla $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Dowód tego twierdzenia jest konsekwencją twierdzeń rachunkowych dotyczących granic oraz odpowiedniego zapisania ilorazów różnicowych. Na przykład

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} = \\ &= \frac{(f(x+h) - f(x))g(x) + f(x+h)(g(x+h) - g(x))}{h} = \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) + f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = xe^{-x}$. Znaleźć ekstrema tej funkcji.

Rozwiązanie

Skorzystamy z kryterium wystarczającego na istnienie ekstremum dla funkcji jednej zmiennej: jeżeli $x_0 \in (a, b)$ oraz $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum (dla $f''(x_0) > 0$ maksimum, a dla $f''(x_0) < 0$ minimum).

Policzmy więc pochodną funkcji $f(x) = xe^{-x}$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (xe^{-x})' = x'e^{-x} + x(e^{-x})' = \\ &= e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Miejsca zerowe pochodnej:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Tak więc punktem „podejrzany” o ekstremum jest $x_0 = 1$. Skorzystajmy teraz z warunku na drugą pochodną:

$$f''(x) = (f'(x))' = ((1-x)e^{-x})' = \\ (1-x)'e^{-x} + (1-x)(e^{-x})' = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}.$$

Tak więc $f''(x_0) = f''(1) = (1-2)e^{-1} = -e^{-1} = -1/e < 0$, czyli funkcja ma minimum w punkcie $x_0 = 1$.

Pokazać, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = xe^{-x^2}$ jest różnowartościowa na zbiorze $(1/\sqrt{2}, \infty)$.

Rozwiązanie

Policzmy pochodną podanej funkcji

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^{-x^2}) = x'e^{-x^2} + x(e^{-x^2})' = 1 \cdot e^{-x^2} + x(-2xe^{-x^2}) = \\ = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}.$$

Niech teraz $f'(x) < 0$, czyli $(1-2x^2)e^{-x^2} < 0$. Tak więc

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (1-2x^2)e^{-x^2} < 0 \Leftrightarrow (1-2x^2) < 0 \Leftrightarrow 1 < 2x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x^2.$$

W szczególności jeżeli $\frac{1}{\sqrt{2}} < x$, to $\frac{1}{2} < x^2$, a z powyższej równoważności wynika, że wtedy $f'(x) < 0$. Oznacza to, że na przedziale $(1/\sqrt{2}, \infty)$ pochodna jest stale ujemna, więc funkcja jest ściśle malejąca na tym przedziale, co gwarantuje, że jest różnowartościowa.

Pokazać następującą nierówność dla każdego $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Rozwiązanie

Niech $f(x) = \cos x - \frac{x^2}{2}$. Wystarczy teraz pokazać, że $f(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ funkcja f jest parzysta: $f(-x) = f(x)$, to wystarczy udowodnić nierówność dla $x \geq 0$.

Policzmy pochodną

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right) = \cos' x - \left(\frac{x^2}{2}\right)' = -\sin x + x \geq -\sin x + \sin x = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy następującą nierówność: $x \geq \sin x$ dla $x \geq 0$. Tak więc f jest niemalejąca dla $x \geq 0$, czyli $f(x) \geq f(0)$ dla $x \geq 0$. Ponieważ $f(0) = \cos 0 - \frac{0^2}{2} = 1$, to ostatecznie $f(x) \geq 1$ dla $x \geq 0$. Ze wspomnianej już parzystości funkcji f wnioskujemy, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Znaleźć takie $b \in \mathbb{R}$, aby funkcja $f(x) = x^3 + bx + 5x - 1$ osiągała minimum w punkcie $x_0 = 5$.

Rozwiązanie

Warunkiem wystarczającym na minimum w punkcie x jest: $f'(x) = 0$ i $f''(x) > 0$. Zastosujmy to dla podanej funkcji oraz punktu $x_0 = 5$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 + bx^2 + 5x - 1)' = 3x^2 + 2bx + 5, \\ f''(x) &= 6x + 2b, \end{aligned}$$

czyli

$$f'(5) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 5^2 + 2b \cdot 5 + 5 = 0 \Rightarrow b = -8.$$

Wtedy $f''(5) = 6 \cdot 5 + 2 \cdot (-8) = 30 - 16 = 14 > 0$. Tak więc dla $b = -8$ podana funkcja ma minimum w punkcie $x_0 = 5$.

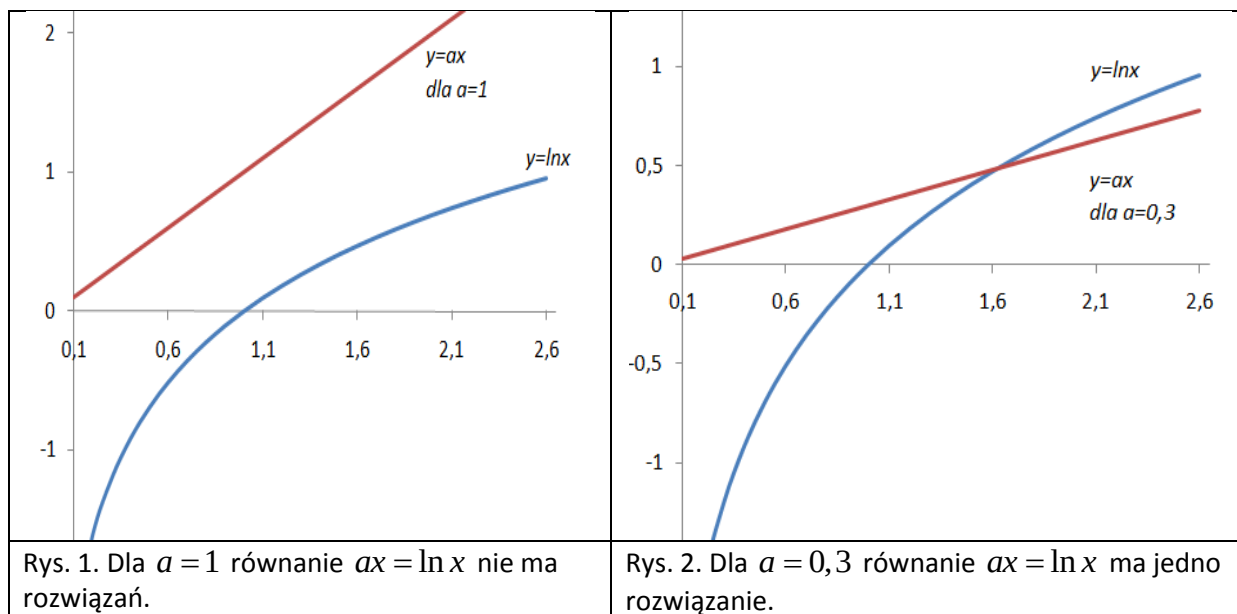
Podać jak zależy liczba rozwiązań równania

$$ax = \ln x,$$

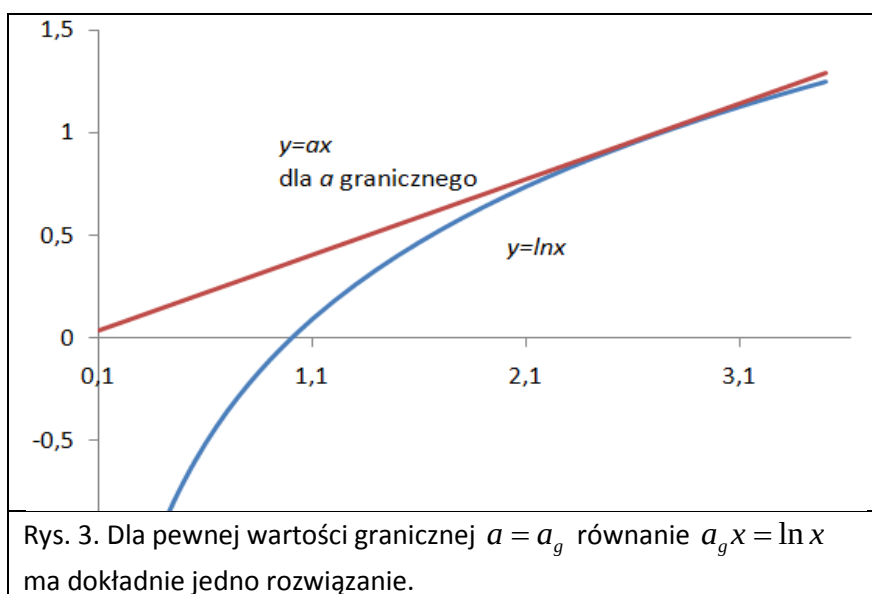
w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie

Zacznijmy od interpretacji geometrycznej podanego równania. Jest ona przedstawiona na poniższych rysunkach, gdzie są przedstawione wykresy funkcji występujących po obu stronach naszego równania. Jeden wykres (Rys. 1) jest dla $a = 1$, a drugi (Rys. 2) dla $a = 0,3$.



Z wykresów tych widać, że dla pewnych parametrów a równanie nie ma rozwiązań, dla pewnych ma dwa, i dla granicznej wartości istnieje dokładnie jedno rozwiązanie naszego równania. Ten przypadek graniczny jest na Rys. 3.



Widać, że graniczna wartość a_g może być otrzymana z warunku, że styczna do $y = \ln x$ w pewnym punkcie x_0 jest równa $y = a_g x$. Stąd mamy $a_g = (\ln x)'|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}$. Ponadto $a_g x_0 = \ln x_0$, co daje następujący układ równań

$$\begin{cases} a_g = \frac{1}{x_0}, \\ a_g x_0 = \ln x_0. \end{cases}$$

Stąd mamy $a_g x_0 = 1$, $1 = \ln x_0$, czyli $x_0 = e$, $a_g = e^{-1}$. Ostatecznie możemy stwierdzić, że

- Dla $a > e^{-1}$ równanie $ax = \ln x$ nie ma rozwiązań.
- Dla $a = e^{-1}$ równanie $ax = \ln x$ ma dokładnie jedno rozwiązanie ($x_0 = e$).
- Dla $0 < a < e^{-1}$ równanie $ax = \ln x$ ma dokładnie dwa rozwiązania.

Reguła de l'Hospitala

Obliczanie symboli nieoznaczonych $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$

Twierdzenie.

Założmy, że f i g są różniczkowalne w otoczeniu punktu x_0 , przy czym $g'(x) \neq 0$ w tym otoczeniu, oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, \quad (2)$$

albo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty, \quad (3)$$

Jeżeli istnieje granica ilorazu pochodnych

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (4)$$

to istnieje granica ilorazu tych funkcji i jest równa granicy ilorazu pochodnych

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (5)$$

Przykłady. Obliczyć podane granice funkcji

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x - \sin \beta x}{x}.$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^k}.$

Twierdzenie (Warunek konieczny ekstremum lokalnego).

Jeżeli funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie $x_0 \in (a, b)$ ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to jej pochodna w tym punkcie jest równa zero

$$f'(x_0) = 0.$$

Twierdzenie (Rolle'a).

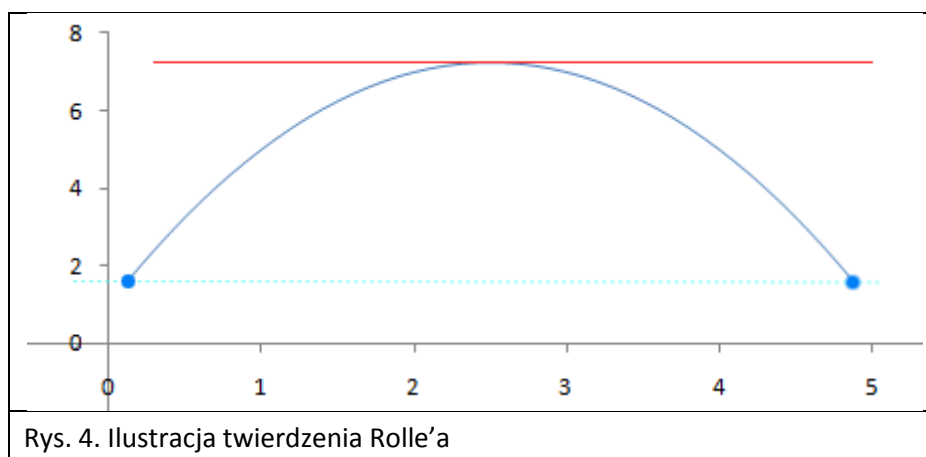
Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b) . Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt c

$$a < c < b,$$

w którym pochodna f' jest równa zero

$$f'(c) = 0. \quad (6)$$

Sens geometryczny twierdzenia Rolle'a jest następujący: na łuku, którego końce mają tę samą rzędną (wartość współrzędnej na osi OY), znajduje się co najmniej jeden punkt, w którym styczna jest pozioma (równoległa do osi OX). Prezentuje to poniższy rysunek. Dla stycznej poziomej kąt nachylenia jest zero, czyli $f'(c) = 0$.

**Twierdzenie (Lagrange'a o przyrostach).**

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b) , to istnieje punkt $a < c < b$ taki, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (7)$$

Dowód. Niech dla $x \in [a, b]$

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Zauważamy, że $g:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w całym przedziale i różniczkowalna w jego wnętrzu. Ponadto

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a), \\ g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a), \end{aligned}$$

Więc są spełnione założenia twierdzenia Rolle'a; istnieje więc $c \in (a, b)$, takie że $g'(c) = 0$. Ale

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

skąd

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej

Wzór Taylora jest jednym z ważniejszych twierdzeń w elementarnym rachunku różniczkowym. Mówi on, że funkcję, która jest n -krotnie różniczkowalna w otoczeniu ustalonego punktu można „dobrze” aproksymować lokalnie przy pomocy odpowiednio dobranego wielomianu (stopnia nie większego niż n). Ponadto wzór ten zawiera precyzyjne określenie błędu z jakim ta aproksymacja jest uzyskana. Należy też podkreślić, że istnieje wiele wersji wzoru Taylora, które różnią się tylko sposobem opisanie tego błędu, natomiast wielomian aproksymujący jest zawsze takiej samej postaci. Najczęściej podaje się wersję wzoru Taylora z *resztą Lagrange'a* lub z *resztą Cauchy'ego*. W obu tych przypadkach reszta wyrażona jest w postaci tylko różniczkowej. Istnieje też wersja z resztą w postaci całkowej.

Twierdzenie (wzór Taylora z resztą Lagrange'a).

Niech funkcja $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie n -krotnie różniczkowalna w sposób ciągły (tzn. pochodna $f^{(n)}(x)$ jest ciągła dla $x \in [a, b]$). Wtedy zachodzi równość

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(b-a)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(b-a)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(b-a)^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(b-a)^n, \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie $a < c < b$.

Dowód. Zdefiniujmy pomocniczą funkcję $F:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{1}{2!} f''(x)(b-x)^2 - \frac{1}{3!} f'''(x)(b-x)^3 - \dots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-1} - K \cdot (b-x)^n,$$

gdzie stałą $K \in \mathbb{R}$ wybieramy tak, aby $F(a) = 0$. Można to zrobić, gdyż warunek ten oznacza

$$K \cdot (b-a)^n = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{1}{2!} f''(a)(b-a)^2 - \dots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1},$$

a ponieważ $(a-b)^n \neq 0$, więc K wyliczymy dzieląc powyższą równość przez $(a-b)^n$. Z definicji funkcji F mamy także $F(b) = 0$. Oznacza to, że dla funkcji $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalnej w całym przedziale zachodzi $F(a) = F(b)$, a zatem z Twierdzenia Rolle'a istnieje $a < c < b$ takie, że $F'(c) = 0$. Policzmy teraz pochodną $F'(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -f'(x) - f''(x)(b-x) + f'(x) - \frac{1}{2!} f^{(3)}(x)(b-x)^2 + \frac{2}{2!} f''(x)(b-x) + \\ &- \frac{1}{3!} f^{(4)}(x)(b-x)^3 + \frac{2}{3!} f^{(3)}(x)(b-x)^3 - \dots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1} + \frac{(n-1)}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2} + \\ &+ nK(b-x)^{n-1} = -\frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1} + nK(b-x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Jak widać wszystkie składniki – z wyjątkiem dwóch ostatnich – uległy redukcji. Ponieważ zachodzi $F'(c) = 0$, więc z powyższej równości mamy

$$F'(c) = -\frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(c)(b-c)^{n-1} + nK(b-c)^{n-1} = 0,$$

co po podzieleniu stronami przez $(b-c)^{n-1} \neq 0$ (gdyż $c < b \Rightarrow b \neq c$), daje

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(c) + nK &= 0, \\ K &= \frac{1}{(n-1)!n} f^{(n)}(c) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c). \end{aligned}$$

Podstawiając teraz otrzymane wyrażenie na K do wzoru na $F(x)$ oraz wykorzystując, że $F(a) = 0$ otrzymamy

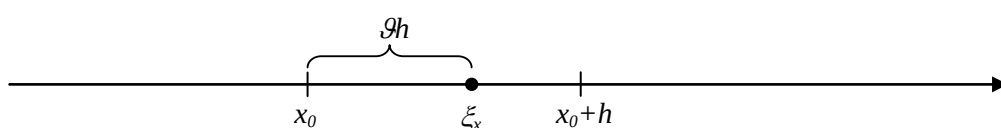
$$0 = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{1}{2!} f''(a)(b-a)^2 - \dots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n,$$

skąd wynika wzór (8).

Wzór Taylora (8) wygodnie jest czasami zapisać nieco inaczej. Po pierwsze punkty a, b można oczywiście zastąpić dowolnymi dwoma z przedziału, w którym jest określona funkcja oznaczanymi $x_0, x \in [a, b]$. Daje to wzór w postaci

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi_x)(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi_x)(x - x_0)^n, \quad (9)$$

gdzie punkt pośredni c został oznaczony przez ξ_x . Oczywiście $\xi_x \in (x_0, x)$, a indeks dolny x ma podkreślić, że punkt ξ_x może zależeć od $x \in [a, b]$. Po drugie, punkt możemy też zapisać tak $\xi_x = x_0 + \vartheta h$, gdzie $0 < \vartheta < 1$ jest pewną liczbą, która też w ogólności zależy od x .



Przy takim oznaczeniu punktu pośredniego wzór (9) ma postać

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h)(x - x_0)^n, \quad (10)$$

Niekiedy wprowadzamy oznaczenie $h = x - x_0$, a wzór (10) zapisujemy wtedy następująco

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)h^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h)h^n. \quad (11)$$

Wzór Maclaurina

Jeżeli funkcja f jest określona w otoczeniu zera, to można we wzorze Taylora (9) podstawić $x_0 = 0$.

Otrzymamy wtedy *wzór Maclaurina*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\vartheta h)}{n!} x^n, \quad (12)$$

dla x należących do odcinka wokół zera, gdzie jest określona funkcja.

Przykład. Zastosujemy wzór Maclaurina dla funkcji (a) e^x oraz (b) $\sin x$. Obie funkcje określone są na całej osi rzeczywistej, $x \in \mathbb{R}$, a ponadto posiadają pochodne dowolnego rzędu (są nieskończenie wiele razy różniczkowalne). Oznacza to, wzór (12) można zastosować dla dowolnego $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

(a) Niech $f(x) = e^x$. Mamy $f(0) = 1$ oraz

$$f'(x) = (e^x)' = e^x, f''(x) = e^x, \text{ itd. } f^{(k)}(x) = e^x \text{ dla } k \in \mathbb{N},$$

a zatem $f^{(k)}(0) = 1$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$ skąd dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\vartheta x}, \quad (13)$$

gdzie $0 < \vartheta < 1$. Liczba ϑ zależy od x .

(b) Niech $f(x) = \sin x$. Mamy $f(0) = 0$ oraz

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x)' = \cos x, f''(x) = (\cos x)' = -\sin x, f'''(x) = (-\sin x)' = -\cos x, \\ f^{(4)}(x) &= (-\cos x)' = \sin x, f^{(5)}(x) = (\sin x)' = \cos x, \dots \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned} f'(0) &= \cos 0 = 1, f''(0) = -\sin 0 = 0, f'''(0) = -\cos 0 = -1, \\ f^{(4)}(0) &= \sin 0 = 0, f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1, \dots \end{aligned}$$

tj. $f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, f^{(5)}(0) = 1, \dots$ Można to zapisać w skrócie tak

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, f^{(2k)}(0) = 0 \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

Ostatecznie wzór Maclaurina (12) dla $f(x) = \sin x$ przyjmie postać (dla wygody zapisujemy go dla $n \rightarrow 2n+1$)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\vartheta x). \quad (14)$$

Widać, że reszta, mimo iż zawiera nieznany parametr $\vartheta \in (0, 1)$, może być łatwo oszacowana z góry:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\vartheta x) \right| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} |\cos(\vartheta x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot 1 = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Oznacza to, że gdy przybliżamy funkcję $\sin x$ wielomianem

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \varepsilon,$$

to błąd ε jest nie większy niż $\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Na przykład $\sin(0,2)$ przybliżymy następująco

$$\sin(0,2) = 0,2 - \frac{(0,2)^3}{3!} + \varepsilon = 0,198667 + \varepsilon,$$

gdzie $|\varepsilon| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{|0,2|^{2 \cdot 2 + 1}}{(2 \cdot 2 + 1)!} = \frac{|0,2|^5}{5!} = 2,67 \cdot 10^{-6}$. Tak więc mamy $\sin(0,2) \approx 0,198667$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku. Gdy w rozwinięciu Taylora dla $\sin(0,2)$

weźmiemy jeszcze jeden składnik (ściślej mówiąc dwa, ale jeden jest zerowy, więc mowa tu o kolejnym niezerowym), to otrzymamy

$$\sin(0,2) = 0,2 - \frac{(0,2)^3}{3!} + \frac{(0,2)^5}{5!} + \varepsilon = 0,198669(3) + \varepsilon,$$

gdzie $|\varepsilon| \leq \frac{|0,2|^7}{7!} = 2,54 \cdot 10^{-9}$. Tak więc mamy $\sin(0,2) \approx 0,19866933\dots$ z dokładnością do ośmiu miejsc po przecinku.

Przybliżanie pochodnych przy pomocy skończonych ilorazów różnicowych

Często zachodzi potrzeba przybliżenia pochodnych przy pomocy wartości samej funkcji. Przykładowo problem ten pojawia się w Metodach numerycznych przy rozwiązywaniu tzw. równań różniczkowych. Najprostszy sposób uzyskania takiego przybliżenia sugeruje sama definicja pochodnej (1), z której wynika następujące wyrażenie

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad (15)$$

Przy czym spodziewamy się, że w ogólnym przypadku im mniejsze będzie $|h| > 0$, tym lepsze będzie przybliżenie. Okazuje się, że błąd przybliżania pochodnej wg wzoru (15) zależy liniowo od $|h|$, czyli dwukrotne zmniejszenie $|h|$ daje w ogólności tylko dwukrotnie lepszą dokładność.

W ilorazie różnicowym (15) zakładamy tylko $h \neq 0$, ale w zastosowaniach wyróżniamy dwa przypadki (a) dodatni przyrost, $h > 0$ oraz (b) ujemny przyrost, $-h < 0$. Mamy wtedy różnice skończoną „do przodu” i „wstecz”:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \text{gdzie } h > 0, \quad (16)$$

oraz

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, \quad \text{gdzie } h > 0. \quad (17)$$

Ostatnie wyrażenie powstaje z podstawienia $-h$ do (15) w miejsce h .

Dokładniejszy sposób przybliżania pierwszej pochodnej daje iloraz różnicowy „centralny”

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}, \quad (18)$$

w którym błąd jest rzędu h^2 .

Wzór Taylora może być wykorzystywany do wyprowadzania różnych ilorazów różnicowych przybliżających pochodne oraz do dokładnego oszacowania błędu przybliżenia.

Twierdzenie. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie daną funkcją oraz $x_0, x_0 \pm h \in [a, b]$. Wtedy

a) jeżeli f jest różniczkowalna dwukrotnie w sposób ciągły, to

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + r(h), \quad (19)$$

gdzie $|r(h)| \leq M \cdot |h|$ oraz stała $M > 0$ nie zależy od x_0, h .

b) jeżeli f jest różniczkowalna trzykrotnie w sposób ciągły, to

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + r(h), \quad (20)$$

gdzie $|r(h)| \leq M \cdot h^2$ oraz stała $M > 0$ nie zależy od x_0, h .

Jak widać z tego twierdzenia aproksymowanie pierwszej pochodnej przy pomocy ilorazów różnicowych do przodu i wstecz jest rzędu $O(h)$, natomiast iloraz centralny daje aproksymację rzędu $O(h^2)$.

Dowód. Podstawowym narzędziem będzie wzór Taylora. Z (11) mamy dla h

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(\xi_1)h^2,$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi_1)h,$$

zatem $|r(h)| = \frac{1}{2} |f''(\xi_1)| h \leq \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| |h| = M \cdot |h|$, gdzie jak widzimy

$M = \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| < \infty$. Skończoność stałej M wynika z założenia, że f ma drugą pochodną ciągłą na przedziale $[a, b]$.

Przypadek różnicy centralnej analizujemy podobnie, ale tym razem wzór Taylora (11) wykorzystamy dwukrotnie: raz podstawiamy h , a za drugim razem podstawiamy $-h$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(\xi_1)h^2 + \frac{1}{3!} f'''(\xi_2)h^3,$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(\xi_1)h^2 - \frac{1}{3!} f'''(\xi_2)h^3$$

gdzie $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ nie muszą być równe. Odejmując stronami

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2f'(x_0)h + \frac{1}{6} (f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2))h^3,$$

i dzieląc przez $2h$ otrzymamy

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{1}{12} (f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))h^2,$$

$$\text{zatem } |r(h)| = \frac{1}{12} |(f'''(x_0 + \mathcal{G}_1 h) + f'''(x_0 - \mathcal{G}_2 h))| h^2 \leq \frac{1}{6} \max_{a \leq x \leq b} \{ |f'''(x)| \} h^2 = M \cdot h^2,$$

Twierdzenie uzasadnia wcześniejsze uwagi dotyczące jakości przybliżania pochodnej podanymi ilorazami różnicowymi. Podaje też precyzyjne warunki (istnienie ciągłej pochodnej f'' lub f'''), ale w praktyce wyrażamy te założenia pisząc, że funkcja powinna być „dostatecznie regularna”.

Do aproksymowania drugiej pochodnej często wykorzystujemy następującą różnicę centralną

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}, \quad (21)$$

gdzie błąd – jak za chwilę pokażemy – jest rzędu h^2 .

Twierdzenie. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją czterokrotnie różniczkowalną w sposób ciągły oraz $x_0, x_0 \pm h \in [a, b]$. Wtedy

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} + r(h),$$

gdzie $|r(h)| \leq M \cdot h^2$ oraz stała $M > 0$ nie zależy od x_0, h .

Dowód. wzór Taylora (11) wykorzystamy dwukrotnie: raz podstawiamy h , a za drugim razem podstawiamy $-h$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0 + \mathcal{G}_1 h)h^4, \\ f(x_0 - h) &= f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 - \frac{1}{3!} f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0 + \mathcal{G}_2 h)h^4, \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in (0, 1)$ nie muszą być równe. Dodajemy stronami

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{2}{2!} f''(x_0)h^2 + \frac{1}{4!} (f^{(4)}(x_0 + \mathcal{G}_1 h) + f^{(4)}(x_0 + \mathcal{G}_2 h))h^4,$$

co po uporządkowaniu i podzieleniu przez h^2 daje

$$\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0) + \frac{1}{4!} (f^{(4)}(x_0 + \mathcal{G}_1 h) + f^{(4)}(x_0 + \mathcal{G}_2 h))h^2,$$

zatem

$$\begin{aligned} |r(h)| &= \frac{1}{4!} |(f^{(4)}(x_0 + \mathcal{G}_1 h) + f^{(4)}(x_0 + \mathcal{G}_2 h))| h^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{24} (\sup_{a \leq x \leq b} \{ |f^{(4)}(x)| \} + \sup_{a \leq x \leq b} \{ |f^{(4)}(x)| \}) h^2 = \frac{1}{12} \sup_{a \leq x \leq b} \{ |f^{(4)}(x)| \} h^2 = M \cdot h^2, \end{aligned}$$

gdzie $M = \frac{1}{12} \sup_{a \leq x \leq b} \{ |f^{(4)}(x)| \} < \infty$.

Interpolacja wielomianowa

Wzór Taylora może być interpretowany jako sposób przybliżania funkcji na podstawie informacji o tej funkcji w wybranym punkcie x_0 . Informacje te to wartości funkcji oraz pochodnych w tym punkcie, czyli $\{f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)\}$. Mając te „dane” możemy funkcję przybliżyć wzorem (10)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

gdzie $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi_x)(x-x_0)^n$ oraz $\xi_x \in (x_0, x)$ jest pewnym punktem zależnym od x . Oznacza to, że $f(x)$ jest przybliżana wielomianem, a błąd przybliżenia wynosi $R_{n+1}(x)$. W wielu sytuacjach zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$, więc mamy tu faktycznie przybliżenie wartości $f(x)$ wielomianem

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

Niejako drugi skrajny przypadek jest wtedy, gdy informacje o funkcji są najbardziej podstawowe, tzn. znane są tylko wartości, ale w różnych punktach. Możemy to sformułować następująco: dane są różne punkty $x_0 < x_1 < \dots < x_n$; znaleźć wielomian $p(x)$ taki, że

$$p(x_i) = f(x_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n. \quad (22)$$

Wielomian taki jest dość łatwo podać. Niech *wielomiany bazowe Lagrange’a* będą zdefiniowane następująco

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad \text{dla } i = 0, \dots, n. \quad (23)$$

Widać, że L_i są wielomianami stopnia n oraz

$$L_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k \neq i, \\ 0 & \text{dla } k = i. \end{cases} \quad (24)$$

Stąd mamy następujące rozwiązanie problemu (22)

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)L_j(x). \quad (25)$$

To co nas będzie dalej interesowało to jest błąd przybliżania funkcji f wielomianem p . Innymi słowy chcemy oszacować różnicę $f(x) - p(x)$.

Twierdzenie. Jeżeli $f \in C^{n+1}([a, b])$, a wielomian p stopnia n spełnia warunek interpolacji (22) dla różnych punktów $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, to zachodzi równość

$$f(x) = p(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)(x-x_0)\dots(x-x_n), \quad (26)$$

dla pewnego punktu $a < \xi_x < b$.

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że wzór (26) jest prawdziwy dla każdego $x = x_i$ (wtedy obie strony są równe zero). Dlatego dalej możemy ograniczyć się do przypadku $x \neq x_i$ dla $i = 0, \dots, n$. Metoda dowodzenia jest podobna do zastosowanej w dowodzie wzoru Taylora. Definiujemy pomocniczą funkcję $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$F(t) = f(t) - p(t) - K(t - x_0) \cdot \dots \cdot (t - x_n), \quad (27)$$

gdzie K jest stałą (za chwilę ją określimy) oraz $p(t)$ jest wielomianem interpolacyjnym (25), ale zmienną jest teraz t : $p(t) = \sum_{j=0}^n f(x_j) L_j(t)$. Dla ustalonego $x \in [a, b]$ definiujemy K tak, aby $F(x) = 0$, tzn.

$$F(x) = f(x) - p(x) - K(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = 0, \\ K = \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}.$$

Wyrażenie na K jest poprawne, gdyż $(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \neq 0$, co wynika z tego, że $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$.

Przy tak dobranej stałej K funkcja $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma $n + 2$ miejsc zerowych, $\{x, x_0, \dots, x_n\}$:

$$F(x_i) = \underbrace{f(x_i) - p(x_i)}_{=0} - K(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot \underbrace{(x_i - x_i)}_{=0} \cdot \dots \cdot (x_i - x_n) = 0 \quad \text{dla } i = 0, \dots, n, \\ F(x) = 0 \quad (\text{z doboru } K).$$

Ponieważ F jest różniczkowalna, więc pomiędzy każdą parą dwóch sąsiednich miejsc zerowych musi istnieć punkt, w którym pochodna F' jest równa zero (wynika to z twierdzenia Rolle'a). Ponieważ wszystkich sąsiadujących par jest $n + 1$, więc możemy stwierdzić, że $F' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ posiada $n + 1$ miejsc zerowych (po jednym w każdej parze wyznaczającej odcinek, na końcach którego wartości F są równe). Zatem mamy $z_1 < z_2 < \dots < z_{n+1}$ takie, że $F'(z_i) = 0$ dla $i = 1, \dots, n + 1$. Rozumując analogicznie dla $F' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, która ma $n + 1$ miejsc zerowych, wnioskujemy, że $F'' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma n miejsc zerowych. Kontynuując to rozumowanie dochodzimy do wniosku, że pochodna $F^{(n+1)}$ ma co najmniej jedno miejsce zerowe, zatem

$$\exists \xi \in (a, b) : F^{(n+1)}(\xi) = 0. \quad (28)$$

Korzystając teraz z postaci funkcji F , wzór (27), obliczamy $n + 1$ pochodną:

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - p^{(n+1)}(t) - K((t - x_0) \cdot \dots \cdot (t - x_n))^{(n+1)} = f^{(n+1)}(t) - (n + 1)!K, \quad (29)$$

Gdyż $p(t)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n , więc $p^{(n+1)}(t) \equiv 0$, a $(t - x_0) \cdot \dots \cdot (t - x_n)$ jest wielomianem stopnia dokładnie $n + 1$ przy czym składnikiem o najwyższej potęgde jest t^{n+1} , skąd $(t^{n+1})^{(n+1)} = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(t^{n+1}) = (n + 1)!$. Łącząc teraz wzory (28) oraz (29) otrzymujemy

$$f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!K = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

co po wstawieniu do wzoru (27) oraz wykorzystaniu równości $F(x) = 0$ daje

$$f(x) - p(x) - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0) \cdots (x-x_n) = 0,$$

a to jest równoważne ze wzorem (26).

Na podstawie równości (26) z podanego twierdzenia możemy oszacować błąd interpolacji w sposób następujący. Niech $M \geq 0$ oznacza największą wartość pochodnej $f^{(n+1)}$, czyli

$$M = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

to dla wszystkich $x \in [a, b]$ możemy zapisać oszacowanie na błąd interpolacji:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |(x-x_0) \cdots (x-x_n)|. \quad (30)$$

Przykład. Jak jest dokładność przybliżenia wartości $\sin 38^\circ$ w oparciu o znajomość funkcji $\sin x$ dla $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ oraz 60° ?

Rozwiązanie: Musimy pamiętać, że funkcje trygonometryczne są tak naprawdę zdefiniowane dla miary łukowej (radiany). Przejście od miary wyrażonej w stopniach do łukowej to $\alpha \rightarrow \alpha \cdot \pi/180$. Zatem węzły interpolacji x_0, x_1, x_2, x_3 to $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$. Ponieważ $f^{(n+1)}(x) = f^{(4)}(x) = \sin x$, więc $M = \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{3}]} |\sin x| \leq 1$. Korzystając z oszacowania (30) dostajemy

$$|\sin x - p(x)| \leq \frac{1}{(3+1)!} |(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})| = \frac{1}{24} |x(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})|.$$

Dla 38° mamy $x = 38 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{19\pi}{90}$ dostajemy

$$\begin{aligned} |\sin(\frac{19\pi}{90}) - p(\frac{19\pi}{90})| &\leq \frac{1}{24} |\frac{19\pi}{90}(\frac{19\pi}{90} - \frac{\pi}{6})(\frac{19\pi}{90} - \frac{\pi}{4})(\frac{19\pi}{90} - \frac{\pi}{3})| = \frac{\pi^4}{24} \frac{19}{90} (\frac{19}{90} - \frac{1}{6})(\frac{19}{90} - \frac{1}{4})(\frac{19}{90} - \frac{1}{3}) = \\ &= \frac{\pi^4}{24} \frac{1463}{32805000} < 0,000182. \end{aligned}$$

Optymalny dobór węzłów

Na podstawie oszacowania błędu (30) widać, że wielkość tego błędu zależy od rozmieszczenia punktów interpolacji $x_0, x_1, \dots, x_n$ oraz oczywiście od samego punktu x . Możemy jednak postawić

pytanie czy jest jakiś „najlepszy” wybór węzłów, który gwarantowałby najmniejszy błąd? Po pierwsze zauważmy, że dla ustalonych $x_0, x_1, \dots, x_n$ błąd interpolacji w ustalonym punkcie $x \in [a, b]$ zależy od wyrażenia

$$|(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)|.$$

Istnieje też największa wartość tego błędu, gdy będziemy zmieniali $x \in [a, b]$. Wprowadźmy więc oznaczenie

$$\Phi(x_0, \dots, x_n) := \max_{a \leq x \leq b} |(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)|.$$

$\Phi(x_0, \dots, x_n)$ oznacza więc maksymalny błąd jaki może pojawić się gdy dokonujemy interpolacji dla różnych punktów $x \in [a, b]$. Z tego określenia mamy oczywistą nierówność

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \Phi(x_0, \dots, x_n) \quad \text{dla dowolnego } x \in [a, b],$$

co oznacza, że błąd przybliżenia jest ograniczony przez $\frac{M}{(n+1)!} \Phi(x_0, \dots, x_n)$ niezależnie od $x \in [a, b]$.

Teraz chcielibyśmy mieć tak wybrane punkty $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, aby błąd ten był minimalny. Inaczej pytamy o takie węzły, dla których $\Phi(x_0, \dots, x_n)$ osiąga minimum:

$$\Phi(x_0^*, \dots, x_n^*) = \min_{a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b} \Phi(x_0, \dots, x_n).$$

Dla wygody optymalizację tą przeprowadza się na unormowanym odcinku $[-1, 1]$. Mamy więc następujący problem optymalizacji: wyznaczyć $-1 \leq x_0 < \dots < x_n \leq 1$ takie, że

$$\min_{-1 \leq x_0, \dots, x_n \leq 1} \max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_0^*) \cdot \dots \cdot (x - x_n^*)|.$$