# Pochodna funkcji jednej zmiennej

Definicja. Mówimy, że funkcja  posiada *pochodną* w punkcie  gdy istnieje granica ilorazu różnicowego:

 

Mówimy też wtedy, że funkcja  jest *różniczkowalna* w punkcie 

### Przykłady

Niech  Obliczyć z definicji 

Rozwiązanie

Sprawdźmy zatem, czy istnieje powyższa granica dla funkcji  Mamy

 

Tak więc

 

Oznacza to, że funkcja  ma pochodną w każdym punkcie, i  Inaczej mówiąc, funkcja jest różniczkowalna w całej swojej dziedzinie.

Niech  Obliczyć z definicji 

Rozwiązanie

Podobnie jak w zadaniu poprzednim musimy zbadać granicę ilorazu różnicowego

 

Zatem

 

co oznacza, że 

Dana jest funkcja  wzorem  Obliczyć z definicji jej pochodną.

Rozwiązanie

 Podobnie jak w zadaniu poprzednim musimy zbadać granicę ilorazu różnicowego

 

Oznacza to, że funkcja  ma pochodną w każdym punkcie dziedziny, i 

Dana jest funkcja  wzorem  Obliczyć z definicji jej pochodną w dowolnym punkcie dziedziny.

Rozwiązanie

Niech  Iloraz różnicowy ma postać

 

Tak więc

 

czyli  dla  Natomiast dla  który jest punktem brzegowym dziedziny możemy mówić tylko o pochodnej jednostronnej (w tym przypadku o pochodnej prawostronnej). Pochodna ta jednak nie istnieje, bo powyższy iloraz wtedy ma postać

 

co oznacza, że granica jest niewłaściwa.

Czy funkcja  dana wzorem jest różniczkowalna w ?

Rozwiązanie

Musimy sprawdzić, czy istnieje granica ilorazu różnicowego przy 

 

Ale widzimy, że  Ponieważ granica właściwa (czyli liczba) nie istnieje, to funkcja  nie jest różniczkowalna w zerze.

Dana jest funkcja  dana wzorem  Zbadać różniczkowalność tej funkcji.

Rozwiązanie

 

Ponieważ w powyższym ilorazie różnicowym występuje wartość bezwzględna, więc najlepiej będzie rozważyć przypadki, tak aby można było się jej pozbyć.

Przypadek 1: 

Dla dostatecznie bliskich zeru  można iloraz zapisać następująco

 

Tak więc dla  pochodna 

Przypadek 2: 

Dla dostatecznie bliskich zeru  mamy wtedy  Zatem

 

Tak więc dla  pochodna 

Przypadek 3: 

Iloraz różnicowy ma teraz postać

 

Wykorzystaliśmy oczywistą równość  Tak więc 

Możemy teraz podsumować te wzory następująco

 

Gdy się dokładniej przyjrzymy powyższemu wzorowi, to dojdziemy do wniosku, że można go zapisać jednym wyrażeniem:  dla dowolnego 

Funkcja  dana jest wzorem

 

Dla jakich wartości parametru  istnieje pochodna 

Rozwiązanie

Policzymy pochodne jednostronne (o ile istnieją)  i , a następnie skorzystamy z warunku, że istnieje pochodna  wtedy i tylko wtedy, gdy  Tak więc

 

gdzie skorzystaliśmy z tego, że więc  Mamy zatem

 

Teraz policzymy 

 

Aby istniała pochodna musi być  czyli  Ostatecznie mamy funkcję

 

a pochodna 

## Własności pochodnych

Twierdzenie. Jeżeli  są różniczkowalne w  to

1. 
2. 
3. dla  

Dowód tego twierdzenie jest konsekwencją twierdzeń rachunkowych dotyczących granic oraz odpowiedniego zapisania ilorazów różnicowych. Na przykład



Dana jest funkcja  gdzie  Znaleźć ekstrema tej funkcji.

Rozwiązanie

Skorzystamy z kryterium wystarczającego na istnienie ekstremum dla funkcji jednej zmiennej: jeżeli  oraz  to funkcja  ma w punkcie  ekstremum (dla  maksimum, a dla  minimum).

Policzmy więc pochodną funkcji 

 

 

Miejsca zerowe pochodnej:

 

Tak więc punktem „podejrzanym” o ekstremum jest  Skorzystajmy teraz z warunku na drugą pochodną:

 

Tak więc  czyli funkcja ma minimum w punkcie 

Pokazać, że funkcja  dana wzorem  jest różnowartościowa na zbiorze 

Rozwiązanie

Policzmy pochodną podanej funkcji

 

Niech teraz  czyli  Tak więc

 

W szczególności jeżeli  to  a z powyższej równoważności wynika, że wtedy  Oznacza to, że na przedziale  pochodna jest stale ujemna, więc funkcja jest ściśle malejąca na tym przedziale, co gwarantuje, że jest różnowartościowa.

Pokazać następującą nierówność dla każdego 

 

Rozwiązanie

Niech  Wystarczy teraz pokazać, że  dla  Ponieważ funkcja jest parzysta:  to wystarczy udowodnić nierówność dla 

Policzmy pochodną

 

gdzie wykorzystaliśmy następującą nierówność:  dla  Tak więc  jest niemalejąca dla  czyli  dla  Ponieważ  to ostatecznie  dla  Ze wspomnianej już parzystości funkcji  wnioskujemy, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego 

Znaleźć takie  aby funkcja  osiągała minimum w punkcie 

Rozwiązanie

Warunkiem wystarczającym na minimum w punkcie  jest:  i  Zastosujmy to dla podanej funkcji oraz punktu 

 

czyli

 

Wtedy  Tak więc dla  podana funkcja ma minimum w punkcie 

Podać jak zależy liczba rozwiązań równania

 

w zależności od parametru 

Rozwiązanie

Zacznijmy od interpretacji geometrycznej podanego równania. Jest ona przedstawiona na poniższych rysunkach, gdzie są przedstawione wykresy funkcji występujących po obu stronach naszego równania. Jeden wykres (Rys. 1) jest dla  a drugi (Rys. 2) dla 

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Rys. 1. Dla  równanie  nie ma rozwiązań. | Rys. 2. Dla  równanie  ma jedno rozwiązanie. |

Z wykresów tych widać, że dla pewnych parametrów  równanie nie ma rozwiązań, dla pewnych ma dwa, i dla granicznej wartości istnieje dokładnie jedno rozwiązanie naszego równania. Ten przypadek graniczny jest na Rys. 3.

|  |
| --- |
|  |
| Rys. 3. Dla pewnej wartości granicznej  równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie. |

Widać, że graniczna wartość  może być otrzymana z warunku, że styczna do w pewnym punkcie  jest równa  Stąd mamy  Ponadto  co daje następujący układ równań

 

Stąd mamy   czyli  Ostatecznie możemy stwierdzić, że

* Dla  równanie  nie ma rozwiązań.
* Dla  równanie  ma dokładnie jedno rozwiązanie ().
* Dla  równanie  ma dokładnie dwa rozwiązania.

## Reguła de l’Hospitala

Obliczanie symboli nieoznaczonych  i 

### Twierdzenie.

Załóżmy, że  i  są różniczkowalne w otoczeniu punktu  przy czym  w tym otoczeniu, oraz

 

albo

 

Jeżeli istnieje granica ilorazu pochodnych

 

to istnieje granica ilorazu tych funkcji i jest równa granicy ilorazu pochodnych

 

Przykłady. Obliczyć podane granice funkcji

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

### Twierdzenie (Warunek konieczny ekstremum lokalnego).

Jeżeli funkcja  ma w punkcie  ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to jej pochodna w tym punkcie jest równa zeru

 

### Twierdzenie (Rolle’a).

Niech funkcja  będzie ciągła w przedziale domkniętym  i różniczkowalna w przedziale otwartym  Jeśli  to istnieje taki punkt c

 

w którym pochodna  jest równa zeru

 

Sens geometryczny twierdzenia Rolle’a jest następujący: na łuku, którego końce mają tę samą rzędną (wartość współrzędnej na osi OY), znajduje się co najmniej jeden punkt, w którym styczna jest pozioma (równoległa do osi OX). Prezentuje to poniższy rysunek. Dla stycznej poziomej kąt nachylenie jest zero, czyli 

|  |
| --- |
|  |
| Rys. 4. Ilustracja twierdzenia Rolle’a |

### Twierdzenie (Lagrange’a o przyrostach).

Jeżeli funkcja  jest ciągła w przedziale domkniętym  i różniczkowalna w przedziale otwartym  to istnieje punkt  taki, że

 

Dowód. Niech dla 

 

Zauważamy, że  jest ciągła w całym przedziale i różniczkowalna w jego wnętrzu. Ponadto

 

Więc są spełnione założenia twierdzenia Rolle’a; istnieje więc  takie że  Ale

 

skąd

 

## Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej

Wzór Taylora jest jednym z ważniejszych twierdzeń w elementarnym rachunku różniczkowym. Mówi on, że funkcję, która jest krotnie różniczkowalna w otoczeniu ustalonego punktu można „dobrze” aproksymować lokalnie przy pomocy odpowiednio dobranego wielomianu (stopnia nie większego niż  Ponadto wzór ten zawiera precyzyjne określenie błędu z jakim ta aproksymacja jest uzyskana. Należy też podkreślić, że istnieje wiele wersji wzoru Taylora, które różnią się tylko sposobem opisania tego błędu, natomiast wielomian aproksymujący jest zawsze takiej samej postaci. Najczęściej podaje się wersję wzoru Taylora z *resztą Lagrange’a* lub z *resztą Cauchy’ego*. W obu tych przypadkach reszta wyrażona jest w postaci tylko różniczkowej. Istnieje też wersja z resztą w postaci całkowej.

### Twierdzenie (wzór Taylora z resztą Lagrange’a).

Niech funkcja  będzie krotnie różniczkowalna w sposób ciągły (tzn. pochodna  jest ciągła dla  Wtedy zachodzi równość



gdzie 

Dowód. Zdefiniujmy pomocniczą funkcję  następująco

 

gdzie stałą  wybieramy tak, aby  Można to zrobić, gdyż warunek ten oznacza

 

a ponieważ  więc  wyliczmy dzieląc powyższą równość przez  Z definicji funkcji  mamy także  Oznacza to, że dla funkcji  różniczkowalnej w całym przedziale zachodzi  a zatem z Twierdzenia Rolle’a istnieje  takie, że  Policzmy teraz pochodną 

 

Jak widać wszystkie składniki – z wyjątkiem dwóch ostatnich – uległy redukcji. Ponieważ zachodzi  więc z powyższej równości mamy

 

co po podzieleniu stronami przez  (gdyż  daje

 

Podstawiając teraz otrzymane wyrażenie na  do wzoru na  oraz wykorzystując, że  otrzymamy

 

skąd wynika wzór .

Wzór Taylora wygodnie jest czasami zapisać nieco inaczej. Po pierwsze punkty  można oczywiście zastąpić dowolnymi dwoma z przedziału, w którym jest określona funkcja oznaczanymi  Daje to wzór w postaci

 

gdzie punkt pośredni  został oznaczony przez  Oczywiście  a indeks dolny  ma podkreślić, że punkt  może zależeć od  Po drugie, punkt możemy też zapisać tak  gdzie  jest pewną liczbą, która też w ogólności zależy od 

*x0*

*x0+h*

*x*

*ϑh*

Przy takim oznaczeniu punktu pośredniego wzór ma postać

 

Niekiedy wprowadzamy oznaczenie  a wzór zapisujemy wtedy następująco



### Wzór Maclaurina

Jeżeli funkcja  jest określona w otoczeniu zera, to można we wzorze Taylora podstawić  Otrzymamy wtedy *wzór Maclaurina*

 

dla  należących do odcinka wokół zera, gdzie jest określona funkcja.

Przykład. Zastosujemy wzór Maclaurina dla funkcji (a)  oraz (b)  Obie funkcje określone są na całej osi rzeczywistej,  a ponadto posiadają pochodne dowolnego rzędu (są nieskończenie wiele razy różniczkowalne). Oznacza to, wzór można zastosować dla dowolnego 

1. Niech  Mamy  oraz

 

a zatem  dla  skąd dla dowolnego  zachodzi

 

gdzie  Liczba  zależy od 

1. Niech  Mamy  oraz

 

a zatem

 

tj.  Można to zapisać w skrócie tak

 

Ostatecznie wzór Maclaurina dla  przyjmie postać (dla wygody zapisujemy go dla 

 

Widać, że reszta, mimo iż zawiera nieznany parametr  może być łatwo oszacowana z góry:

 

Oznacza to, że gdy przybliżamy funkcję  wielomianem

 

to błąd jest nie większy niż  Na przykład  przybliżymy następująco

 

gdzie  Tak więc mamy z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku. Gdy w rozwinięciu Taylora dla  weźmiemy jeszcze jeden składnik (ściślej mówiąc dwa, ale jeden jest zerowy, więc mowa tu o kolejnym niezerowym), to otrzymamy

 

gdzie  Tak więc mamy  z dokładnością do ośmiu miejsc po przecinku.

### Przybliżanie pochodnych przy pomocy skończonych ilorazów różnicowych

Często zachodzi potrzeba przybliżenia pochodnych przy pomocy wartości samej funkcji. Przykładowo problem ten pojawia się w Metodach numerycznych przy rozwiązywaniu tzw. równań różniczkowych. Najprostszy sposób uzyskania takiego przybliżenia sugeruje sama definicja pochodnej , z której wynika następujące wyrażenie

 

Przy czym spodziewamy się, że w ogólnym przypadku im mniejsze będzie  tym lepsze będzie przybliżenie. Okazuje się, że błąd przybliżania pochodnej wg wzoru zależy liniowo od  czyli dwukrotne zmniejszenie  daje w ogólności tylko dwukrotnie lepszą dokładność.

W ilorazie różnicowym zakładamy tylko  ale w zastosowaniach wyróżniamy dwa przypadki (a) dodatni przyrost,  oraz (b) ujemny przyrost,  Mamy wtedy różnice skończoną „*do przodu*” i „*wstecz*”:

 

oraz

 

Ostatnie wyrażenie powstaje z podstawienia  do w miejsce 

Dokładniejszy sposób przybliżania pierwszej pochodnej daje iloraz różnicowy „*centralny*”

 

w którym błąd jest rzędu 

Wzór Taylora może być wykorzystywany do wyprowadzania różnych ilorazów różnicowych przybliżających pochodne oraz do dokładnego oszacowania błędu przybliżenia.

Twierdzenie. Niech  będzie daną funkcją oraz  Wtedy

1. jeżeli  jest różniczkowalna dwukrotnie w sposób ciągły, to

 

gdzie  oraz stała  nie zależy od 

1. jeżeli  jest różniczkowalna trzykrotnie w sposób ciągły, to

 

gdzie  oraz stała  nie zależy od 

Jak widać z tego twierdzenia aproksymowanie pierwszej pochodnej przy pomocy ilorazów różnicowych do przodu i wstecz jest rzędu  natomiast iloraz centralny daję aproksymację rzędu 

Dowód. Podstawowym narzędziem będzie wzór Taylora. Z mamy dla 

 

zatem  gdzie jak widzimy  Skończoność stałej  wynika z założenia, że  ma drugą pochodną ciągłą na przedziale 

Przypadek różnicy centralnej analizujemy podobnie, ale tym razem wzór Taylora wykorzystamy dwukrotnie: raz podstawiamy  a za drugim razem podstawiamy 

 

gdzie  nie muszą być równe. Odejmując stronami

 

i dzieląc przez  otrzymamy

 

zatem 

Twierdzenie uzasadnia wcześniejsze uwagi dotyczące jakości przybliżania pochodnej podanymi ilorazami różnicowymi. Podaje też precyzyjne warunki (istnienie ciągłej pochodnej lub  ale w praktyce wyrażamy te założenia pisząc, że funkcja powinna być „dostatecznie regularna”.

Do aproksymowania drugiej pochodnej często wykorzystujemy następującą różnicę centralną

 

gdzie błąd – jak za chwilę pokażemy – jest rzędu 

Twierdzenie. Niech  będzie funkcją czterokrotnie różniczkowalną w sposób ciągły oraz  Wtedy

 

gdzie  oraz stała  nie zależy od 

Dowód. wzór Taylora wykorzystamy dwukrotnie: raz podstawiamy  a za drugim razem podstawiamy 

 

gdzie  nie muszą być równe. Dodajemy stronami

 

co po uporządkowaniu i podzieleniu przez  daje

 

zatem

 

gdzie 

Interpolacja wielomianowa

Wzór Taylora może być interpretowany jako sposób przybliżania funkcji na podstawie informacji o tej funkcji w wybranym punkcie  Informacje te to wartości funkcji oraz pochodnych w tym punkcie, czyli  Mając te „dane” możemy funkcję przybliżyć wzorem

 

gdzie  oraz  jest pewnym punktem zależnym od  Oznacza to, że  jest przybliżana wielomianem, a błąd przybliżenie wynosi  W wielu sytuacjach zachodzi  więc mamy tu faktycznie przybliżenie wartości  wielomianem

 

Niejako drugi skrajny przypadek jest wtedy, gdy informacje o funkcji są najbardziej podstawowe, tzn. znane są tylko wartość, ale w różnych punktach. Możemy to sformułować następująco: dane są różne punkty znaleźć wielomian  taki, że

 

Wielomian taki jest dość łato podać. Niech *wielomiany bazowe Lagrange’a* będą zdefiniowane następująco

 

Widać, że  są wielomianami stopnia  oraz

 

Stąd mamy następujące rozwiązanie problemu

 

To co nas będzie dalej interesowało to jest błąd przybliżania funkcji  wielomianem  Innymi słowy chcemy oszacować różnicę 

Twierdzenie. Jeżeli  a wielomian  stopnia  spełnia warunek interpolacji dla różnych punktów  to zachodzi równość

 

dla pewnego punktu 

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że wzór jest prawdziwy dla każdego  (wtedy obie strony są równe zero). Dlatego dalej możemy ograniczyć się do przypadku  dla  Metoda dowodzenia jest podobna do zastosowanej w dowodzie wzoru Taylora. Definiujmy pomocniczą funkcję  następująco

 

gdzie  jest stałą (za chwilę ją określimy) oraz  jest wielomianem interpolacyjnym , ale zmienną jest teraz   Dla ustalonego  definiujemy  tak, aby  tzn.

 

Wyrażenie na jest poprawne, gdyż  co wynika z tego, że 

Przy tak dobranej stałej  funkcja  ma  miejsc zerowych, 

 

Ponieważ  jest różniczkowalna, więc pomiędzy każdą parą dwóch sąsiednich miejsc zerowych musi istnieć punkt, w którym pochodna  jest równa zero (wynika to z twierdzenia Rolle’a). Ponieważ wszystkich sąsiadujących par jest  więc możemy stwierdzić, że  posiada  miejsc zerowych (po jednym w każdej parze wyznaczającej odcinek, na końcach którego wartości  są równe). Zatem mamy  takie, że  dla  Rozumując analogicznie dla  która ma  miejsc zerowych, wnioskujemy, że ma  miejsc zerowych. Kontynuując to rozumowanie dochodzimy do wniosku, że pochodna  ma co najmniej jedno miejsce zerowe, zatem

 

Korzystając teraz z postaci funkcji  wzór , obliczamy  pochodną:

 

Gdyż  jest wielomianem stopnia co najwyżej  więc  a  jest wielomianem stopnia dokładnie  przy czym składnik składnikiem o najwyższej potędze jest  skąd  Łącząc teraz wzory oraz otrzymujemy

 

co po wstawieniu do wzoru oraz wykorzystaniu równości  daje

 

a to jest równoważne ze wzorem .

Na podstawie równości z podanego twierdzenia możemy oszacować błąd interpolacji w sposób następujący. Niech  oznacza największą wartość pochodnej  czyli

 

to dla wszystkich  możemy zapisać oszacowanie na błąd interpolacji:

 

Przykład. Jak jest dokładność przybliżenia wartości  w oparciu o znajomość funkcji  dla  oraz 

Rozwiązanie: Musimy pamiętać, że funkcje trygonometryczne są tak naprawdę zdefiniowane dla miary łukowej (radiany). Przejście od miary wyrażonej w stopniach do łukowej to  Zatem węzły interpolacji  to  Ponieważ  więc  Korzystając z oszacowania dostajemy

 

Dla  mamy  dostajemy

 

## Optymalny dobór węzłów

Na podstawie oszacowania błędu widać, że wielkość tego błędu zależy od rozmieszczenia punktów interpolacji  oraz oczywiście od samego punktu  Możemy jednak postawić pytanie czy jest jakiś „najlepszy” wybór węzłów, który gwarantowałby najmniejszy błąd? Po pierwsze zauważmy, że dla ustalonych  błąd interpolacji w ustalonym punkcie  zależy od wyrażenia

 

Istnieje też największa wartość tego błędu, gdy będziemy zmieniali  Wprowadźmy więc oznaczenie

 

 oznacza więc maksymalny błąd jaki może pojawić się gdy dokonujemy interpolacji dla różnych punktów  Z tego określenia mamy oczywistą nierówność

 

co oznacza, że błąd przybliżenia jest ograniczony przez  niezależnie od  Teraz chcielibyśmy mieć tak wybrane punkty  aby błąd ten był minimalny. Inaczej pytamy o takie węzły, dla których  osiąga minimum:

 

Dla wygody optymalizację tą przeprowadza się na unormowanym odcinku  Mamy więc następujący problem optymalizacji: wyznaczyć  takie, że

 