

Ciągi i szeregi liczbowe

Definicja. Jeżeli każdej liczbie naturalnej przyporządkowana została jakaś liczba rzeczywista, to mówimy, że został określony ciąg liczbowy (nieskończony). Formalnie oznacza to, że ciąg liczbowy jest funkcją o dziedzinie będącej zbiorem liczb naturalnych

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Zazwyczaj ciąg liczbowy zapisujemy w postaci $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ lub $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (często skracamy ten zapis do postaci (a_n)). Liczby występujące w ciągu nazywamy *wyrazami* ciągu, a wyrażenie a_n nazywamy *ogólnym wyrazem* ciągu (lub n -tym wyrazem ciągu). Bardzo często (ale nie zawsze) ciąg można zdefiniować podając „wzór” na ogólny wyraz ciągu.

Przykłady

- 1) $a_n = n^2$, początkowe wyrazy: 1, 4, 9, 16, 25, ...
- 2) $a_n = (-1)^n$, początkowe wyrazy: -1, +1, -1, +1, -1, +1, ...
- 3) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, początkowe wyrazy: 0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, ...
- 4) $a_n = n$ – ta liczba pierwsza, początkowe wyrazy: 2, 3, 5, 7, 11, ...
- 5) $a_n = \#\{k \in \mathbb{N} : k \leq n \text{ oraz } k \text{ jest liczbą pierwszą}\}$, początkowe wyrazy: 0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...

Zauważmy, że pierwsze trzy przykłady są stosunkowo proste: aby obliczyć jakiś wyraz ciągu wystarczy podstawić do wzoru odpowiednią wartość n . Na przykład:

Ad 1) $a_3 = 3^2 = 9$, $a_7 = 7^2 = 49$.

Ad 2) $a_5 = (-1)^5 = -1$, $a_{10} = (-1)^{10} = +1$.

Ad 3) $a_4 = 1 - 1/4 = 3/4$, $a_{100} = 1 - 1/100 = 99/100 = 0,99$.

Natomiast w przypadku 4) i 5) nie dysponujemy takimi formułami. W przykładzie 4) chodzi tak naprawdę o ponumerowanie wszystkich liczb pierwszych (wiadomo, że jest ich nieskończenie wiele; pierwszy dowód pochodzi od Euklidesa). W arytmetyce najczęściej używa się na ten ciąg oznaczenia (p_n) . Dla niedużych $n \in \mathbb{N}$ nie ma problemu z podaniem odpowiedniego wyrazu ciągu, np. $p_5 = 11$ czy $p_9 = 23$, ale dla bardzo dużych n może to być poważny problem. W przypadku 5) (symbol $\#$ oznacza tutaj liczbę elementów zbioru czyli moc zbioru) ciąg można opisać tak:

n – ty wyraz mówi ile jest liczb pierwszych mniejszych lub równych n .

Ciąg ten jest bardzo ważny w teorii liczb i przeważnie stosuje się tam oznaczenie π_n . Tak więc mamy

$$\begin{aligned}
\pi_6 &= \#\{k \in \mathbb{N} : k \leq 6 \text{ oraz } k \text{ jest liczbą pierwszą}\} = \\
&= \#\{2, 3, 5\} = 3. \\
\pi_{13} &= \#\{k \in \mathbb{N} : k \leq 13 \text{ oraz } k \text{ jest liczbą pierwszą}\} = \\
&= \#\{2, 3, 5, 7, 11, 13\} = 6.
\end{aligned}$$

Aby obliczyć n – ty wyraz ciągu (π_n) możemy wypisać wszystkie liczby pierwsze mniejsze lub równe n i je policzyć. Jednakże dla dużych n może to być trudne lub wręcz niemożliwe. Niestety nie ma żadnego „wzoru” na ciąg (π_n) , ale dość dobrze jest zachowanie się tego ciągu dla dużych n .

Zauważmy, że wyrażenie $\frac{\pi_n}{n}$ mówi ile średnio jest liczb pierwszych w zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$. W roku 1896 Jacques Hadamard udowodnił twierdzenie, które mówi że stosunek ten jest asymptotycznie równy $1/\ln n$. Można to nieformalnie wyrazić tak

$$\frac{\pi_n}{n} \approx \frac{1}{\ln n}, \quad (1)$$

przy czym im większe jest n , tym dokładniejsze jest to przybliżenie. Zauważmy, że wynik ten oznacza, że „gęstość” rozmieszczenia liczb pierwszych maleje do zera wraz ze zwiększaniem się przedziału $[1, n]$.

Ciągi monotoniczne

Definicja. Mówimy, że ciąg (a_n) jest:

(i) *rosnący* (silnie rosnący), jeśli

$$a_n < a_{n+1} \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}$$

(ii) *niemalejący* (słabo rosnący), jeśli

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}$$

(iii) *malejący* (silnie malejący), jeśli

$$a_n > a_{n+1} \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}$$

(iv) *nierosnący* (słabo malejący), jeśli

$$a_n \geq a_{n+1} \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Ciągiem *monotonicznym* nazywamy ciąg, który jest niemalejący lub nierosnący.

Przykład.

Pokażemy, że ciąg dany wzorem

$$a_n = \frac{n}{n+1},$$

jest rosnący. W tym celu obliczymy różnicę $a_{n+1} - a_n$ i zobaczymy, że jest ona dodatnia. Mamy zatem

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0. \end{aligned}$$

Mamy więc $a_{n+1} - a_n > 0$, skąd $a_{n+1} > a_n$ co inaczej zapisujemy jako $a_n < a_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Definicja. Ciąg (a_n) nazywamy *ograniczonym*, jeśli istnieje liczba $M \geq 0$ taka, że

$$|a_n| \leq M \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Definicja ta jest równoważna następującej: ciąg jest ograniczony, gdy istnieje przedział skończony, w którym znajdują się wszystkie wyrazy tego ciągu.

Przykłady.

1) Ciąg $a_n = \frac{3}{2+n}$ jest ograniczony, gdyż

$$|a_n| = \left| \frac{3}{2+n} \right| = \frac{3}{2+n} \leq \frac{3}{2} = 1,5.$$

Tak więc w definicji wystarczy wziąć $M = 1,5$.

2) Ciąg $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2}$ jest ograniczony, gdyż

$$|a_n| = \left| (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2} \right| = \frac{n+1}{n^2+2} \leq 1.$$

Tak więc w definicji wystarczy wziąć $M = 1$.

3) Ciąg $a_n = 4 \sin \frac{n^4 - 4n^3 + 2^2}{\sqrt{3n+4} - 1}$ jest ograniczony. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że może być trudno coś powiedzieć o tym ciągu, gdyż wzór jest trochę skomplikowany. Ale zauważmy, że całe skomplikowane wyrażenie jest argumentem funkcji sinus. Mamy więc

$$a_n = 4 \sin x_n \quad \text{gdzie } x_n = \frac{n^4 - 4n^3 + 2^2}{\sqrt{3n+4} - 1}.$$

Ale dobrze wiemy, że funkcja sinus jest ograniczona: $-1 \leq \sin x \leq 1$ czyli $|\sin x| \leq 1$. Tak więc

$$|a_n| = |4 \sin x_n| = 4 |\sin x_n| \leq 4.$$

Wystarczy teraz wziąć $M = 4$.

- 4) Ciąg $a_n = 2n + \frac{1}{n}$ jest nieograniczony. Widać bowiem, że jest on sumą dwóch ciągów: n i $1/n$. O ile ten drugi jest ograniczony $|1/n| \leq 1$, to pierwszy może być dowolnie duży.

Jednym z ważniejszych pojęć w teorii ciągów jest pojęcie *granicy ciągu*. Intuicyjnie jest to związanie z problemem, czy wyrazy ciągu „zbiegają” do jakiejś wartości gdy numer staje się coraz większy. A zatem pytamy

$$\text{czy } a_n \rightarrow (?), \text{ gdy } n \rightarrow \infty?$$

Jeżeli faktycznie wartości ciągu „koncentrują” się wokół jakiejś liczby (lub pokrywają się z tą liczbą), to ta liczba będzie granicą ciągu (a_n). Niestety formalna definicja nie jest taka prosta i wymaga użycia trzech kwantyfikatorów (i to we właściwej kolejności). Na szczęście wystarczy na ogół tylko intuicyjne rozumienie definicji granicy, gdyż do jej obliczania można będzie stosować wiele pomocnych wzorów i zależności, których stosowanie nie wymaga precyzyjnego rozumienia formalnej definicji granicy.

Definicja. Mówimy, że ciąg (a_n) jest *zbieżny* do granicy $g \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq k \quad |a_n - g| < \varepsilon. \quad (2)$$

Gdy ciąg jest zbieżny do granicy g , to mówimy też, że g jest *granicą* tego ciągu

Jeżeli wprowadzimy frazę „*prawie wszystkie wyrazy ciągu*” jako skrót frazy „wszystkie wyrazy ciągu z wyjątkiem co najwyżej skończonego wielu”, to powyższą definicję możemy wypowiedzieć w skrócie następująco:

liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą ciągu (a_n) , jeśli w dowolnym otoczeniu liczby g znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) .

Ponadto wprowadzamy ważne oznaczenie: jeżeli g jest granicą ciągu, to piszemy

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\text{lub } a_n \rightarrow g \text{ gdy } n \rightarrow \infty).$$

Przykład.

Udowodnić na podstawie definicji, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Dowód. Występująca w definicji granicy nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ ma w tym przypadku postać

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

W tym przypadku najlepiej będzie tę nierówność zapisać tak (wykonując odejmowanie pod wartością bezwzględną):

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Niech więc dane będzie dowolne (ale ustalone) $\varepsilon > 0$ zgodnie z tym co mamy w definicji (2). Rozwiązując powyższą nierówność względem n , otrzymujemy

$$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Oznacza to, że istnieje k , o którym mówi definicja granicy, a mianowicie np. $k := (1-\varepsilon)/\varepsilon$. Jeżeli teraz mamy $n > k$, to oczywiście $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, a to w konsekwencji oznacza spełnienie nierówności (3).

Granice pewnych konkretnych ciągów

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} = 0$ gdzie $s > 0$.
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ gdy $|q| < 1$.
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ gdzie $a > 0$.
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Ad 3) Załóżmy najpierw, że $a > 1$. Oznaczmy $\delta_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Wtedy mamy $1 + \delta_n = \sqrt[n]{a}$, a po podniesieniu do n -tej potęgi otrzymujemy: $(1 + \delta_n)^n = a$. Z wzoru dwumianowego Newtona możemy napisać

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \delta_n + \binom{n}{2} \delta_n^2 + \dots = a, \text{ czyli}$$

$$1 + n\delta_n + \binom{n}{2} \delta_n^2 + \dots = a.$$

Ponieważ $a > 1$, więc $\delta_n > 0$. Zatem w powyższej sumie wszystkie składniki są dodatnie skąd mamy nierówności $0 < n\delta_n < a$ czyli

$$\begin{array}{ccc} 0 < \delta_n < \frac{a}{n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Tak więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. To oznacza, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Przypadek $0 < a < 1$ sprowadza się do już udowodnionego. Mianowicie teraz mamy $\frac{1}{a} > 1$, więc

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Ad 4) Postępujemy podobnie jak w poprzednim przykładzie. Niech $\delta_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} 1 + \delta_n &= \sqrt[n]{n}, \\ (1 + \delta_n)^n &= n, \\ 1 + n\delta_n + \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 + \dots &= n, \\ \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 &< n, \\ \frac{n-1}{2}\delta_n^2 &< 1, \\ 0 < \delta_n &< \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \end{aligned}$$

Tak więc z twierdzenia o trzech ciągach mamy $\delta_n \rightarrow 0$. Stąd wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Przykład. Obliczyć granicę ciągu $a_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)$.

Ta granica jest trudniejsza od poprzednich, gdyż nie wystarczy dość elementarny wzór taki, jak np. wzór dwumianowy Newtona. W rozwiązaniu wykorzystamy następującą nierówność, w której występuje logarytm naturalny:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \text{dla } x > -1. \quad (4)$$

Oznaczmy $\delta_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Wtedy $a_n = n\delta_n$, a więc musimy obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} n\delta_n$. Mamy następującą zależność

$$\begin{aligned} \delta_n &= \sqrt[n]{a} - 1, \\ 1 + \delta_n &= \sqrt[n]{a}, \\ (1 + \delta_n)^n &= a. \end{aligned}$$

Weźmy logarytm naturalny obu stron ostatniej równości

$$n \ln(1 + \delta_n) = \ln a. \quad (5)$$

Teraz wykorzystujemy nierówność (4) dla $x = \delta_n$

$$\frac{\delta_n}{1 + \delta_n} \leq \ln(1 + \delta_n) \leq \delta_n,$$

mnożymy przez n

$$\frac{n\delta_n}{1 + \delta_n} \leq n \ln(1 + \delta_n) \leq n\delta_n,$$

i korzystając z (5) mamy

$$\frac{n\delta_n}{1 + \delta_n} \leq \ln a \leq n\delta_n.$$

Po podzieleniu obu stron przez $n\delta_n$ otrzymujemy

$$\frac{1}{1 + \delta_n} \leq \frac{\ln a}{n\delta_n} \leq 1.$$

Ponieważ już wiemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, więc z powyższej nierówności (w oparciu o twierdzenie o trzech ciągach) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a}{n\delta_n} = 1,$$

czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n\delta_n = \ln a$. Tak więc szukana granica równa jest $\ln a$.

Przykład. Obliczyć granice podanych ciągów:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n^2 + 1} \sin(4n + 3), \\ a_n &= \sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n}, \\ a_n &= \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Rozwiązanie.

$$|a_n| = \left| \frac{n}{n^2 + 1} \sin(4n + 3) \right| = \frac{n}{n^2 + 1} |\sin(4n + 3)| \leq \frac{n}{n^2 + 1} \cdot 1 = \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Tak więc $|a_n| \leq \frac{n}{n^2 + 1} \rightarrow 0$, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Korzystamy ze wzoru: $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_n &= \sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n} = 2 \cos \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \sin \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \sin \frac{n+1-n}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 2 \cos \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \sin \frac{1}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}. \end{aligned}$$

Zatem

$$|a_n| = 2 \left| \cos \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \right| \left| \sin \frac{1}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{1}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right| \rightarrow 0,$$

gdyż $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0$.

Warunki zbieżności ciągu

Aby wykazać zbieżność ciągu wprost z definicji (2), trzeba znać granicę tego ciągu. Na ogół jednak mamy dany tylko sam ciąg (a_n) i granicę musimy wyznaczyć lub uzasadnić, że ona istnieje poprzez analizę własności ciągu (a_n) . Potrzebne są więc twierdzenia orzekające o zbieżności ciągu, które można by stosować, nie znając granicy ciągu. Twierdzenia takie nazywamy *warunkami zbieżności ciągu*.

Twierdzenie

Jeżeli ciąg (a_n) liczb rzeczywistych jest monotoniczny (rosnący lub malejący) i ograniczony, to jest zbieżny w $\mathbb{R}$.

Powyższe twierdzenie jest związane z podstawową własnością zbioru liczb rzeczywistych, tzw. *aksjomatem ciągłości*. Nie będziemy tego tematu rozwijać, ale zauważmy, że analogiczne twierdzenie nie zachodzi w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Na przykład jeżeli weźmiemy pod uwagę ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych liczby $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$(a_n) = (1,0 \ 1,4 \ 1,41 \ 1,414 \ 1,4142 \ 1,41421 \ 1,414213 \ 1,4142135 \ \dots),$$

to widzimy, że $(a_n) \subset \mathbb{Q}$, ciąg jest rosnący i ograniczony (np. przez 2), ale nie ma granicy w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Inny przykład ciągu liczb wymiernych, który jest monotoniczny i ograniczony ale nie ma granicy wymiernej (ma natomiast granicę w $\mathbb{R}$) poznamy przy definicji liczby e (patrz (6)).

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Dane są dwa ciągi $(a_n), (c_n)$ zbieżne do tej samej granicy, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$. Jeżeli wyrazy trzeciego ciągu (b_n) są od pewnego numeru ograniczone z dołu i z góry następująco

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{dla } n \geq k,$$

to ciąg (b_n) jest zbieżny do tej samej granicy: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

Przykład. Znaleźć granice podanych ciągów wykorzystując twierdzenie o trzech ciągach.

$$\text{a) } a_n = \frac{\sin(n^3 + 2)}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{b) } a_n = \sqrt[n]{5 \cdot 3^n + 8 \cdot 7^n}.$$

$$\text{c) } a_n = \sqrt[n]{4 \cdot 6^n - 3 \cdot 4^n + 11}.$$

Rozwiązanie.

Ad a) Zauważmy, że funkcja sinus jest ograniczona: $|\sin x| \leq 1, x \in \mathbb{R}$. Zatem

$$-1 \leq \sin(n^3 + 2) \leq 1,$$

więc

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin(n^3 + 2)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, więc z twierdzenia o trzech ciągach mamy $\frac{\sin(n^3 + 2)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$.

Ad b) Zauważmy, że $8 \cdot 7^n \leq 5 \cdot 3^n + 8 \cdot 7^n \leq 8 \cdot 7^n + 8 \cdot 7^n = 16 \cdot 7^n$, zatem

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{8 \cdot 7^n} &\leq \sqrt[n]{5 \cdot 3^n + 8 \cdot 7^n} \leq \sqrt[n]{16 \cdot 7^n}, \\ 7 \sqrt[n]{8} &\leq \sqrt[n]{5 \cdot 3^n + 8 \cdot 7^n} \leq 7 \sqrt[n]{16}. \end{aligned}$$

Wcześniej pokazaliśmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla dowolnej stałej $a > 0$, skąd $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{8} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{16} = 1$.

Mamy więc: $\lim_{n \rightarrow \infty} (7 \sqrt[n]{8}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (7 \sqrt[n]{16}) = 7$ czyli z twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5 \cdot 3^n + 8 \cdot 7^n} = 7.$$

Ad c) Mamy $a_n = \sqrt[n]{4 \cdot 6^n - 3 \cdot 4^n + 11} = 6 \sqrt[n]{4 - 3 \cdot (2/3)^n + 11/6^n}$. Zauważmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4 - 3 \cdot (2/3)^n + 11/6^n) = 4,$$

co w szczególności oznacza, że dla dostatecznie dużych n mamy

$$3 < 4 - 3 \cdot (2/3)^n + 11/6^n < 5.$$

Stąd $\sqrt[n]{3} < \sqrt[n]{4 - 3 \cdot (2/3)^n + 11/6^n} < \sqrt[n]{5}$, a ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} = 1$, więc z twierdzenia o trzech ciągach mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4 - 3 \cdot (2/3)^n + 11/6^n} = 1$. Ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4 \cdot 6^n - 3 \cdot 4^n + 11} = 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4 - 3 \cdot (2/3)^n + 11/6^n} = 6.$$

Liczba e

Jest to jedna z ważniejszych liczb występujących w matematyce (podobnie jak liczba π). Najczęściej liczbę tę definiuje się jako granicę pewnego ciągu liczbowego, którego wyraz ogólny ma postać

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (6)$$

Aby wykazać, że ciąg (6) ma granicę sprawdzimy, że jest on rosnący i ograniczony.

Stosujemy wzór dwumianowy Newtona do wyrażenia $(1+x)^n$. Mamy tożsamość

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!}x^n,$$

w której za x podstawiamy $\frac{1}{n}$, co daje

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!} \left(\frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!}. \end{aligned} \quad (7)$$

Analogicznie możemy zapisać a_{n+1} (tym razem podajemy też przedostatni składnik sumy, aby potem można było lepiej porównać)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \\ &= 1 + 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)}{3!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)}{n!} + \\ &+ \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Teraz porównamy kolejne składniki obu sum. Ponieważ $n < n+1$, więc $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ skąd

$$1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n}, \quad 1 - \frac{2}{n+1} > 1 - \frac{2}{n}, \quad 1 - \frac{3}{n+1} > 1 - \frac{3}{n} \quad \text{itd.}$$

Ale obie strony powyższych nierówności są dodatnie, więc nierówności są także dla iloczynów. Stąd mamy

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!},$$

czyli

$$a_{n+1} > a_n + \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}. \quad (8)$$

W szczególności mamy $a_{n+1} > a_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Ograniczoność ciągu można uzyskać analizując wyrażenie (7). W rachunku poniżej wykorzystamy nierówność $n! > 2^{n-1}$ dla $n > 1$. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} < \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Tak więc mamy

$$2 < a_n < 3,$$

co oznacza, że ciąg (a_n) jest ograniczony.

Definicja. Liczba $e \in \mathbb{R}$ określona jest wzorem

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (9)$$

Definicja ta jest poprawna, gdyż powyżej udowodniliśmy, że granica ciągu występującego w (9) istnieje.

Można udowodnić, że e jest liczbą niewymierną, równą w przybliżeniu 2,718281. Logarytm o podstawie e jest nazywany *logarytmem naturalnym* i oznaczany symbolem $\ln$. Mamy więc

$$\ln x = \log_e x.$$

Uwaga. Zauważmy, że nierówność (8) daje więcej informacji niż sam fakt monotoniczności ciągu (a_n) . Wyrażenie po a_n można przekształcić następująco (mnożymy licznik i mianownik przez $(n+1)^n$):

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!} &= \frac{(n+1-1)(n+1-2) \dots (n+1-n)}{(n+1)!(n+1)^n} = \frac{n(n-1) \dots 1}{(n+1)!(n+1)^n} = \\ &= \frac{1}{(n+1)^{n+1}}, \end{aligned}$$

więc otrzymujemy

$$a_{n+1} - a_n > \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Przykład. Wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}. \quad (10)$$

Rozwiązanie. Dla $n > 1$ mamy

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}},$$

więc

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}} \rightarrow \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{e},$$

$$\text{gdź} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} = 0 \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Twierdzenie

Dany jest ciąg liczb dodatnich $(a_n) \subset \mathbb{R}_+$. Załóżmy, że istnieje następująca granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g. \quad (11)$$

Wtedy ciąg $(\sqrt[n]{a_n})$ też ma granicę oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g. \quad (12)$$

Przykład. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}. \quad (13)$$

Rozwiązanie. Zapiszmy wyrażenie $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ tak, aby można było zastosować powyższe twierdzenie.

Mamy bowiem $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^n}} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$. To oznacza, że szukana granica (13) ma postać (12) dla

$a_n = \frac{n!}{n^n}$. Zgodnie z podanym twierdzeniem musimy zatem obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Zatem

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n!(n+1)}{(n+1)^n(n+1)} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \\ &= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Tak więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}. \quad (14)$$

Podkreślmy, że powyższe twierdzenie mówi, iż z istnienia granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ wynika istnienie granicy

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ oraz, że w takiej sytuacji obie granice są równe. Nie można natomiast tej implikacji

odwrócić, tzn. może się zdarzyć, że istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ ale nie istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Przykład. Niech ciąg (a_n) ma postać

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Pokazać, że istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ ale nie istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $\sqrt[n]{1} = 1$, więc ciąg $(\sqrt[n]{a_n})$ ma postać

$$1, \sqrt[2]{2}, 1, \sqrt[4]{2}, 1, \sqrt[6]{2}, 1, \sqrt[8]{2}, \dots$$

Widać, że co drugi wyraz tego ciągu to $\sqrt[2k]{2} = \sqrt[k]{2^{1/2}}$. Na mocy wykazanej wcześniej granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ mamy zatem $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{2^{1/2}} = 1$. Oznacza to, że ciąg $(\sqrt[n]{a_n})$ zawiera dwa podciągi:

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

$$\sqrt[2]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[6]{2}, \sqrt[8]{2}, \dots$$

i każdy jest zbieżny do 1, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Z drugiej strony, jeżeli weźmiemy pod uwagę ciąg (a_{n+1}/a_n) , to ma on postać

$$2, 1/2, 2, 1/2, 2, 1/2, 2, 1/2, \dots$$

Widzimy, że składa się on z dwóch podciągów, z których jeden jest zbieżny do 2 a drugi do 1/2. Tak więc nie istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Twierdzenie (Cauchy'ego)

Dany jest ciąg liczbowy $(a_n) \subset \mathbb{R}_+$, który ma granicę, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$. Wtedy ciąg średnich arytmetycznych

$$b_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n},$$

też jest zbieżny i ma tę samą granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = g. \quad (16)$$

Przykład. Obliczyć granice następującego ciągu

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że ciąg występujący w tym przykładzie ma postać, która odpowiada sformułowanemu powyżej twierdzeniu. Wystarczy przyjąć

$$a_n = \sqrt[n]{n},$$

i wtedy mamy

$$x_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Ponieważ wcześniej pokazaliśmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, więc na mocy powyższego twierdzenia mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

ZADANIA

Zad 1) Sprawdzić, czy podane ciągi są monotoniczne i ograniczone:

$$(a) \ a_n = \frac{n}{3^n}, \quad b) \ a_n = \frac{4^n}{n!}, \quad c) \ a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n^2 + 1}.$$

Zad2) Korzystając z definicji granicy pokazać, że

$$a) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n-1} = 3 \quad b) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \quad c) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n.$$

Zad3) Obliczyć granice podanych ciągów:

$$a) \ a_n = \frac{n}{3n^2 + 4} \cos(n! + 2), \quad b) \ a_n = \sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n}, \quad c) \ a_n = n(\sqrt[3]{n^3 + n} - n),$$

$$d) \ a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, \quad e) \ a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$