# Ciągi i szeregi liczbowe

**Definicja.** Jeżeli każdej liczbie naturalnej przyporządkowana została jakaś liczba rzeczywista, to mówimy, że został określony ciąg liczbowy (nieskończony). Formalnie oznacza to, że ciąg liczbowy jest funkcją o dziedzinie będącej zbiorem liczb naturalnych



Zazwyczaj ciąg liczbowy zapisujemy w postaci  lub  (często skracamy ten zapis do postaci ). Liczby występujące w ciągu nazywamy *wyrazami* ciągu, a wyrażenie  nazywamy *ogólnym wyrazem* ciągu (lub *n-*tym wyrazem ciągu). Bardzo często (ale nie zawsze) ciąg można zdefiniować podając „wzór” na ogólny wyraz ciągu.

**Przykłady**

1.  początkowe wyrazy: 
2. początkowe wyrazy: 
3. początkowe wyrazy: 
4. początkowe wyrazy: 
5. początkowe wyrazy: 

Zauważmy, że pierwsze trzy przykłady są stosunkowo proste: aby obliczyć jakiś wyraz ciągu wystarczy podstawić do wzoru odpowiednią wartość  Na przykład:

Ad 1) 

Ad 2) 

Ad 3) 

Natomiast w przypadku 4) i 5) nie dysponujemy takimi formułami. W przykładzie 4) chodzi tak naprawdę o ponumerowanie wszystkich liczb pierwszych (wiadomo, że jest ich nieskończenie wiele; pierwszy dowód pochodzi od Euklidesa). W arytmetyce najczęściej używa się na ten ciąg oznaczenia  Dla niedużych  nie ma problemu z podaniem odpowiedniego wyrazu ciągu, np.  czy  ale dla bardzo dużych  może to być poważny problem. W przypadku 5) (symbol # oznacza tutaj liczbę elementów zbioru czyli moc zbioru) ciąg można opisać tak:

ty wyraz mówi ile jest liczb pierwszych mniejszych lub równych 

Ciąg ten jest bardzo ważny w teorii liczb i przeważnie stosuje się tam oznaczenie  Tak więc mamy



Aby obliczyć ty wyraz ciągu  możemy wypisać wszystkie liczby pierwsze mniejsze lub równe  i je policzyć. Jednakże dla dużych  może to być trudne lub wręcz niemożliwe. Niestety nie ma żadnego „wzoru” na ciąg  ale dość dobrze jest zachowanie się tego ciągu dla dużych  Zauważmy, że wyrażenie  mówi ile średnio jest liczb pierwszych w zbiorze  W roku 1896 Jacques Hadamard udowodnił twierdzenie, które mówi że stosunek ten jest asymptotycznie równy  Można to nieformalnie wyrazić tak



przy czym im większe jest  tym dokładniejsze jest to przybliżenie. Zauważmy, że wynik ten oznacza, że „gęstość” rozmieszczenia liczb pierwszych maleje do zera wraz ze zwiększaniem się przedziału 

## Ciągi monotoniczne

**Definicja.** Mówimy, że ciąg  jest:

1. *rosnący* (silnie rosnący), jeśli



1. *niemalejący* (słabo rosnący), jeśli



1. *malejący* (silnie malejący), jeśli



1. *nierosnący* (słabo malejący), jeśli



Ciągiem *monotonicznym* nazywamy ciąg, który jest niemalejący lub nierosnący.

**Przykład.**

Pokażemy, że ciąg dany wzorem



jest rosnący. W tym celu obliczymy różnicę  i zobaczymy, że jest ona dodatnia. Mamy zatem



Mamy więc  skąd  co inaczej zapisujemy jako dla 

**Definicja.** Ciąg  nazywamy *ograniczonym*, jeśli istnieje liczba  taka, że



Definicja ta jest równoważna następującej: ciąg jest ograniczony, gdy istnieje przedział skończony, w którym znajdują się wszystkie wyrazy tego ciągu.

**Przykłady.**

1. Ciąg  jest ograniczony, gdyż



Tak więc w definicji wystarczy wziąć 

1. Ciąg  jest ograniczony, gdyż



Tak więc w definicji wystarczy wziąć 

1. Ciąg  jest ograniczony. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że może być trudno coś powiedzieć o tym ciągu, gdyż wzór jest trochę skomplikowany. Ale zauważmy, że całe skomplikowane wyrażenie jest argumentem funkcji sinus. Mamy więc



Ale dobrze wiemy, że funkcja sinus jest ograniczona:  czyli  Tak więc



Wystarczy teraz wziąć 

1. Ciąg  jest nieograniczony. Widać bowiem, że jest on sumą dwóch ciągów:  i  O ile ten drugi jest ograniczony  to pierwszy może być dowolnie duży.

Jednym z ważniejszych pojęć w teorii ciągów jest pojęcie *granicy ciągu*. Intuicyjnie jest to związanie z problemem, czy wyrazy ciągu „zmierzają” do jakiejś wartości gdy numer staje się coraz większy. A zatem pytamy



Jeżeli faktycznie wartości ciągu „koncentrują” się wokół jakiejś liczby (lub pokrywają się z tą liczbą), to ta liczba będzie granicą ciągu  Niestety formalna definicje nie jest taka prosta i wymaga użycia trzech kwantyfikatorów (i to we właściwej kolejności). Na szczęście wystarczy na ogół tylko intuicyjne rozumienie definicji granicy, gdyż do jej obliczania można będzie stosować wiele pomocnych wzorów i zależności, których stosowanie nie wymaga precyzyjnego rozumienia formalnej definicji granicy.

Definicja. Mówimy, że ciąg  jest *zbieżny* do granicy  jeśli



Gdy ciąg jest zbieżny do granicy  to mówimy też, że  jest *granicą* tego ciągu

Jeżeli wprowadzimy frazę „*prawie wszystkie wyrazy ciągu*” jako skrót frazy „wszystkie wyrazy ciągu z wyjątkiem co najwyżej skończenie wielu”, to powyższą definicję możemy wypowiedzieć w skrócie następująco:

*liczba  jest granicą ciągu  jeśli w dowolnym otoczeniu liczby  znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu *

Ponadto wprowadzamy ważne oznaczenie: jeżeli  jest granicą ciągu, to piszemy



Przykład.

Udowodnić na podstawie definicji, że



Dowód. Występująca w definicji granicy nierówność  ma w tym przypadku postać



W tym przypadku najlepiej będzie tę nierówność zapisać tak (wykonując odejmowanie pod wartością bezwzględną):



Niech więc dane będzie dowolne (ale ustalone)  zgodnie z tym co mamy w definicji . Rozwiązując powyższą nierówność względem  otrzymujemy



Oznacza to, że istnieje  o którym mówi definicja granicy, a mianowicie np.  Jeżeli teraz mamy  to oczywiście a to w konsekwencji oznacza spełnienie nierówności .

**Granice pewnych konkretnych ciągów**

1.  gdzie 
2.  gdy 
3.  gdzie 
4. 

Ad 3) Załóżmy najpierw, że  Oznaczmy  Wtedy mamy  a po podniesieniu do tej potęgi otrzymujemy:  Z e wzoru dwumianowego Newtona możemy napisać



Ponieważ  więc  Zatem w powyższej sumie wszystkie składniki są dodatnie skąd mamy nierówności  czyli



Tak więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy  To oznacza, że 

Przypadek  sprowadza się do już udowodnionego. Mianowicie teraz mamy  więc



Ad 4) Postępujemy podobnie jak w poprzednim przykładzie. Niech  Wtedy



Tak więc z twierdzenia o trzech ciągach mamy  Stąd wynika, że 

**Przykład.** Obliczyć granicę ciągu 

Ta granica jest trudniejsza od poprzednich, gdyż nie wystarczy dość elementarny wzór taki, jak np. wzór dwumianowy Newtona. W rozwiązaniu wykorzystamy następującą nierówność, w której występuje logarytm naturalny:



Oznaczmy  Wtedy  a więc musimy obliczyć granicę  Mamy następujące zależności



Weźmy logarytm naturalny obu stron ostatniej równości



Teraz wykorzystujemy nierówność dla 



mnożymy przez 



i korzystając z mamy



Po podzieleniu obu stron przez  otrzymujemy



Ponieważ już wiemy, że  więc z powyższej nierówności (w oparciu o twierdzenie o trzech ciągach) mamy



czyli  Tak więc szukana granica równa jest 

Przykład. Obliczyć granice podanych ciągów:



Rozwiązanie.



Tak więc  więc  czyli 

Korzystamy ze wzoru:  Otrzymujemy



Zatem



gdyż 

## Warunki zbieżności ciągu

Aby wykazać zbieżność ciągu wprost z definicji , trzeba znać granicę tego ciągu. Na ogół jednak mamy dany tylko sam ciąg  i granicę musimy wyznaczyć lub uzasadnić, że ona istnieje poprzez analizę własności ciągu  Potrzebne są więc twierdzenia orzekające o zbieżności ciągu, które można by stosować, nie znając granicy ciągu. Twierdzenia takie nazywamy *warunkami zbieżności ciągu*.

**Twierdzenie**

Jeżeli ciąg  liczb rzeczywistych jest monotoniczny (rosnący lub malejący) i ograniczony, to jest zbieżny w 

Powyższe twierdzenie jest związane z podstawową własnością zbioru liczb rzeczywistych, tzw. *aksjomatem ciągłości*. Nie będziemy tego tematu rozwijać, ale zauważmy, że analogiczne twierdzenie nie zachodzi w zbiorze liczb wymiernych  Na przykład jeżeli weźmiemy pod uwagę ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych liczby 



to widzimy, że  ciąg jest rosnący i ograniczony (np. przez 2), ale nie ma granicy w zbiorze liczb wymiernych  Inny przykład ciągu liczb wymiernych, który jest monotoniczny i ograniczony ale nie ma granicy wymiernej (ma natomiast granicę w ) poznamy przy definicji liczby  (patrz ).

**Twierdzenie (o trzech ciągach)**

Dane są dwa ciągi  zbieżne do tej samej granicy,  Jeżeli wyrazy trzeciego ciągu  są od pewnego numeru ograniczone z dołu i z góry następująco



to ciąg  jest zbieżny do tej samej granicy: 

Przykład. Znaleźć granice podanych ciągów wykorzystując twierdzenie o trzech ciągach.

1. 
2. 
3. 

Rozwiązanie.

Ad a) Zauważmy, że funkcja sinus jest ograniczona: Zatem



więc



Ponieważ  więc z twierdzenia o trzech ciągach mamy 

Ad b) Zauważmy, że  zatem



Wcześniej pokazaliśmy, że  dla dowolnej stałej  skąd Mamy więc:  czyli z twierdzenia o trzech ciągach



Ad c) Mamy  Zauważmy, że



co w szczególności oznacza, że dla dostatecznie dużych  mamy



Stąd  a ponieważ  więc z twierdzenia o trzech ciągach mamy  Ostatecznie



## Liczba *e*

Jest to jedna z ważniejszych liczb występujących w matematyce (podobnie jak liczba  Najczęściej liczbę tę definiuje się jako granicę pewnego ciągu liczbowego, którego wyraz ogólny ma postać



Aby wykazać, że ciąg ma granicę sprawdzimy, że jest on rosnący i ograniczony.

Stosujmy wzór dwumianowy Newtona do wyrażenia  Mamy tożsamość



w której za  podstawiamy  co daje



Analogicznie możemy zapisać  (tym razem podajemy też przedostatni składnik sumy, aby potem można było lepiej porównać)



Teraz porównamy kolejne składniki obu sum. Ponieważ  więc  skąd



Ale obie strony powyższych nierówności są dodatnie, więc nierówności są także dla iloczynów. Stąd mamy



czyli



W szczególności mamy  dla dowolnego 

Ograniczoność ciągu można uzyskać analizując wyrażenie . W rachunku poniżej wykorzystamy nierówność  dla Mamy bowiem



Tak więc mamy



co oznacza, że ciąg  jest ograniczony.

**Definicja.** Liczba  określona jest wzorem



Definicja ta jest poprawna, gdyż powyżej udowodniliśmy, że granica ciągu występującego w istnieje.

Można udowodnić, że  jest liczbą niewymierną, równą w przybliżeniu  Logarytm o podstawie  jest nazywany *logarytmem naturalnym* i oznaczany symbolem  Mamy więc



Uwaga. Zauważmy, że nierówność daje więcej informacji niż sam fakt monotoniczności ciągu  Wyrażenie po  można przekształcić następująco (mnożymy licznik i mianownik przez ):



więc otrzymujemy



Przykład. Wykazać, że



Rozwiązanie. Dla  mamy



więc



gdyż  oraz 

**Twierdzenie**

Dany jest ciąg liczb dodatnich  Załóżmy, że istnieje następująca granica



Wtedy ciąg  też ma granicę oraz



**Przykład.** Obliczyć granicę



Rozwiązanie. Zapiszmy wyrażenie  tak, aby można było zastosować powyższe twierdzenie. Mamy bowiem  To oznacza, że szukana granica ma postać dla  Zgodnie z podanym twierdzeniem musimy zatem obliczyć granicę  Zatem



Tak więc



Podkreślmy, że powyższe twierdzenie mówi, iż z istnienia granicy  wynika istnienie granicy  oraz, że w takiej sytuacji obie granice są równe. Nie można natomiast tej implikacji odwrócić, tzn. może się zdarzyć, że istnieje  ale nie istnieje granica 

**Przykład.** Niech ciąg  ma postać



Pokazać, że istnieje  ale nie istnieje granica 

Rozwiązanie. Ponieważ  więc ciąg  ma postać



Widać, że co drugi wyraz tego ciągu to  Na mocy wykazanej wcześniej granicy  mamy zatem  Oznacza to, że ciąg zawiera dwa podciągi:



i każdy jest zbieżny do 1, czyli  Z drugiej strony, jeżeli weźmiemy pod uwagę ciąg  to ma on postać



Widzimy, że składa się on z dwóch podciągów, z których jeden jest zbieżny do 2 a drugi do 1/2. Tak więc nie istnieje granica 

**Twierdzenie** (Cauchy’ego)

Dany jest ciąg liczbowy  który ma granicę,  Wtedy ciąg średnich arytmetycznych



też jest zbieżny i ma tę samą granicę:



Przykład. Obliczyć granice następującego ciągu



Rozwiązanie. Zauważmy, że ciąg występujący w tym przykładzie ma postać, która odpowiada sformułowanemu powyżej twierdzeniu. Wystarczy przyjąć



i wtedy mamy



Ponieważ wcześniej pokazaliśmy, że  więc na mocy powyższego twierdzenia mamy



**Zadania**

**Zad 1)** Sprawdzić, czy podane ciągi są monotoniczne i ograniczone:

(a)  b)  c) 

**Zad2)** Korzystając z definicji granicy pokazać, że

a)  b)  c) 

**Zad3)** Obliczyć granice podanych ciągów:

a)  b)  c) 

d)  e) 