

Zbiory, relacje i funkcje

Zbiory będziemy zazwyczaj oznaczać dużymi literami $A, B, C, X, Y, Z, \dots$ natomiast elementy zbiorów zazwyczaj małymi. Podstawą zależność między elementem zbioru a zbiorem, czyli relację przynależności do zbioru zapisujemy następująco

$$x \in X,$$

i czytamy: „ x jest elementem zbioru X ” (lub „ x należy do zbioru X ”). Zaprzeczeniem tego zdania jest „ x nie należy do zbioru X ” co zapisujemy jako

$$x \notin X.$$

Zbiór którego elementami są $x_1, \dots, x_n$ będziemy oznaczać w następujący sposób $\{x_1, \dots, x_n\}$. W szczególności $\{x\}$ oznacza zbiór, którego jedynym elementem jest x . Zbiór, który nie ma żadnych elementów jest oznaczany symbolem $\emptyset$ (można udowodnić, że jest tylko jeden taki zbiór). Jeżeli zbiór zawiera „dużo” elementów lub nieskończenie wiele, to definiując zbiór możemy użyć zapisu

$$\{x \in X : \varphi(x)\}$$

co czytamy „zbiór x -ów należących do X spełniających własność $\varphi(x)$ ”. Na przykład

$$X = \{n \in \mathbb{N} : 2|n\}.$$

Oznacza zbiór liczb naturalnych podzielnych przez dwa, czyli jest to zbiór liczb naturalnych parzystych.

Jeżeli pomiędzy zbiorami X oraz Y zachodzi własność

$$x \in X \Rightarrow x \in Y, \quad (1.1)$$

Tzn. jeżeli każdy element zbioru X jest elementem zbioru Y , to mówimy, że X jest podzbiorem zbioru Y (X zawiera się w Y). Zapisujemy to następująco

$$X \subset Y \text{ lub } Y \supset X. \quad (1.2)$$

Z tego określenia wynika, że dla dowolnego zbioru mamy: $\emptyset \subset X$, $X \subset X$. Mamy także następujący fakt

$$X \subset Y \text{ i } Y \subset X \Leftrightarrow X = Y. \quad (1.3)$$

Definicja. Sumą zbiorów X i Y nazywamy zbiór Z do którego należą wszystkie elementy zbioru X oraz wszystkie elementy zbioru Y . Zbiór taki oznaczamy przez $X \cup Y$. Formalnie mamy zatem

$$x \in X \cup Y \Leftrightarrow x \in X \text{ lub } x \in Y. \quad (1.4)$$

Iloczynem zbiorów X i Y nazywamy zbiór Z do którego należą wszystkie te elementy zbioru X , które jednocześnie należą do zbioru Y . Zbiór taki oznaczamy przez $X \cap Y$. Formalnie mamy zatem

$$x \in X \cap Y \Leftrightarrow x \in X \text{ i } x \in Y. \quad (1.5)$$

Iloczyn zbiorów nazywamy także *przekrojem* lub *częścią wspólną* zbiorów.

Podstawowe prawa dodawania i mnożenia zbiorów

- 1) Przemienność: $X \cup Y = Y \cup X$, $X \cap Y = Y \cap X$.
- 2) Łączność: $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$, $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.
- 3) Rozdzielność iloczynu względem sumy

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

- 4) Rozdzielność sumy względem iloczynu

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

- 5) $X \subset X \cup Y$, $X \cup \emptyset = X$, $X \cup X = X$.
- 6) $X \cap Y \subset X$, $X \cap \emptyset = \emptyset$, $X \cap X = X$.

Definicja. Różnicą zbiorów X i Y nazywamy zbiór tych elementów zbioru X , które nie należą do zbioru Y . Zbiór taki oznaczamy przez $X \setminus Y$. Mamy zatem formalnie

$$x \in X \setminus Y \Leftrightarrow x \in X \text{ i } x \notin Y. \quad (1.6)$$

Często mamy do czynienia z taką sytuacją, że wszystkie rozważane zbiory są podzbiorami jednego „dużego” zbioru U . Na przykład w rachunku różniczkowym jednej zmiennej rzeczywistej wszystkie rozpatrywane zbiory są zawarte w zbiorze liczb rzeczywistych, $U = \mathbb{R}$. W takim przypadku różnicę $U \setminus X$ nazywamy dopełnieniem zbioru i oznaczamy X^c . Z określenia tego mamy oczywiście

$$(X^c)^c = X. \quad (1.7)$$

Twierdzenie. (prawa de Morgana). Dla dowolnych zbiorów X, Y zachodzą równości

$$\begin{aligned} (X \cup Y)^c &= X^c \cap Y^c, \\ (X \cap Y)^c &= X^c \cup Y^c. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Iloczyn kartezjański zbiorów

Mając dane zbiory X, Y możemy łatwo tworzyć nowe zbiory wykorzystując poznane dotychczas operacje sumy, iloczynu czy różnicy. Okazuje się, że można zdefiniować jeszcze jedną operację, która w istotny sposób rozszerza możliwości tworzenia nowych zbiorów. Tą operacją jest właśnie iloczyn kartezjański. Aby go wprowadzić musimy najpierw określić pojęcie pary uporządkowanej. Nieformalnie para uporządkowana elementów x oraz y jest opisana jako uporządkowany ciąg dwuelementowy (x, y) . Precyzyjną definicję podał Kazimierz Kuratowski:

Niech X, Y będą danymi zbiorami. Jeżeli $x \in X, y \in Y$, to parą uporządkowaną nazywamy następujący zbiór dwuelementowy

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}. \quad (1.9)$$

Z definicji (1.9) wynika podstawowy fakt dla par uporządkowanych

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ i } y_1 = y_2.$$

Teraz możemy podać już formalną definicję iloczynu kartezjańskiego.

Definicja. Iloczynem kartezjańskim zbiorów X i Y nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y) , takich że $x \in X$ i $y \in Y$. Oznaczamy go przez $X \times Y$. Tak więc formalny zapis jest następujący

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}. \quad (1.10)$$

Przykład

Niech $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{1, 3\}$. Wtedy iloczyn kartezjański

$$X \times Y = \{(0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (2, 3)\}.$$

Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych, który utożsamiamy ze zbiorem punktów na prostej. Wtedy $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ możemy utożsamiać z płaszczyzną.

Dla zbiorów skończonych określamy moc zbioru jako liczbę jego elementów. Można to pojęcie uogólnić dla dowolnych zbiorów (nieskończonych). Moc zbioru X oznaczamy przez $|X|$ (spotyka się też oznaczenia $\#X, \bar{X}$). Mamy więc

$$|X| := \text{liczba elementów zbioru } X. \quad (1.11)$$

Przykład

- a) Jeżeli $X = \{0, 2, 4\}$, to $|X| = 3$.
- b) Jeżeli $X = \{1, 3, 5, \dots, 99\}$, to $|X| = 55$.
- c) Jeżeli $X = \{0, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}\}\}$, to $|X| = 4$.

Łatwo widzieć, że dla zbiorów skończonych zachodzi równość

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|. \quad (1.12)$$

Definicję iloczynu kartezjańskiego można uogólnić na dowolną liczbę zbiorów. W szczególności dla n zbiorów $X_1, \dots, X_n$ iloczynem kartezjańskim nazywamy zbiór wszystkich n -elementowych układów uporządkowanych $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ takich, że $x_i \in X_i$ dla $i = 1, \dots, n$. Mamy więc z definicji

$$X_1 \times \dots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X_i \text{ i } i = 1, \dots, n\}. \quad (1.13)$$

Zadania

- 1) Niech $|X| = n$. Uzasadnić, że wtedy $|P(X)| = 2^n$ gdzie $P(X)$ oznacza zbiór potęgowy.
- 2) Obliczyć moce podanych zbiorów

$$A = \{-30, -28, -26, \dots, 18, 20\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 10^6\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x = 0\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^6 + 1 = 0\}$$

$$X = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

- 3) Uzasadnić następujące tożsamości dla zbiorów
 - a. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
 - b. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
 - c. $(A \setminus B) \cup C = ((A \cup C) \setminus B) \cup (B \cap C)$.
 - d. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
 - e. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
 - f. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
- 4) Uzasadnić, że

$$A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

Relacje

Przypomnijmy, że iloczyn (produkt) kartezjański $A \times B$ zbiorów A i B jest to zbiór *wszystkich* uporządkowanych par

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ i } b \in B\}.$$

Analogicznie określa się produkt n zbiorów $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, który składa się z uporządkowanych n -ek. Możemy teraz podać teoriomnogościową definicję relacji (skoncentrujemy się tylko na przypadku relacji dwuargumentowych).

Definicja. Relacją (dwuargumentową) $\mathcal{R}$ nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$, a więc

$$\mathcal{R} \subset X \times Y.$$

Gdy mamy zdefiniowaną relację $\mathcal{R}$ i jeżeli para $(x, y) \in \mathcal{R}$, to mówimy, że x jest w relacji z y .

Przykłady

- a) Relacja mniejszości $<$ w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Na przykład mamy $(2, 5) \in <$ ale w praktyce piszemy: $2 < 5$.

- b) Relacja podzielności $|$ w zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Mamy przykładowo $(3, 6) \in |$, $(3, 7) \notin |$. Oczywiście piszemy raczej tak: $3|6$ czy $3 \nmid 7$.
- c) Relacja prostokątności, relacja równoległości, relacja zawierania się zbiorów.
- d) Relacja pusta w zbiorze X , tzn. $\mathcal{R} = \emptyset$ (czyli żadne dwa elementy nie są w relacji); relacja totalna $\mathcal{R} = X \times X$ (czyli każde dwa elementy $x, y \in X$ są ze sobą w relacji).

Gdy mamy dane dwie relacje $\mathcal{R}_1 \subset X \times Y$, $\mathcal{R}_2 \subset Y \times Z$, to superpozycją (złożeniem) $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ relacji $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ nazywamy taki podzbiór $X \times Z$, że

$$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y (x, y) \in \mathcal{R}_1 \text{ oraz } (y, z) \in \mathcal{R}_2\}$$

Możemy to wyrazić też tak

$$x \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 z \Leftrightarrow \exists y \in Y : x \mathcal{R}_1 y \text{ oraz } y \mathcal{R}_2 z.$$

Gdy $X = Y = Z$, można utworzyć relację $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$, którą oznaczać też będziemy przez $\mathcal{R}^2$.

Różne typy relacji

Relacja $\mathcal{R} \subset X \times X$ jest

- i) zwrotna (refleksywna), gdy $\forall x : x \mathcal{R} x$
- ii) symetryczna, gdy $\forall x, y : x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- iii) przechodnia, gdy $\forall x, y, z : x \mathcal{R} y \text{ i } y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$
- iv) spójna, gdy $\forall x, y : x \mathcal{R} y \text{ lub } y \mathcal{R} x$
- v) asymetryczna, gdy $\forall x, y : x \mathcal{R} y \Rightarrow \sim (y \mathcal{R} x)$

Przykłady

- 1) Relacje zwrotne: równoległość prostych, zawieranie się zbiorów, prostokątność prostych, podzielność.
- 2) Relacje symetryczne: równoległość prostych, prostokątność prostych, relacja pokrewieństwa.
- 3) Relacje przechodnie: równoległość prostych, zawieranie się zbiorów, relacja podzielności, relacja mniejszości w $\mathbb{R}$, relacja większości w $\mathbb{R}$.
- 4) Relacje spójne: słaba mniejszość ($\leq$).
- 5) Relacje asymetryczne: relacja mniejszości ($<$), relacja bycia potomkiem.

Relacja równoważności

Jednym z ważniejszych typów relacji w matematyce są tzw. relacje równoważności. Można powiedzieć, że jest to pewnego rodzaju uogólnienie pojęcia równości.

Definicja. Relację $\mathcal{R}$ w zbiorze X nazywamy *relacją równoważności*, jeśli jest ona zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykłady

Następujące relacje są relacjami równoważności:

- 1) równość w dowolnym zbiorze,
- 2) podobieństwo figur geometrycznych,
- 3) relacja podzielności modulo n (tzw. kongruencja),
- 4) relacja równoległości prostych.

Funkcje

Jak już wiemy ściśle pojęcie relacji jest sformalizowaniem na gruncie teorii mnogości intuicyjnego pojęcia związku pomiędzy obiektami. Pojęcie funkcji będzie zaś odpowiednikiem intuicyjnego pojęcia przyporządkowania. W taki bowiem intuicyjny sposób „określa” się funkcję w szkole („... jest to *przyporządkowanie*, które...”). Podobnie jak w przypadku relacji, funkcję będziemy utożsamiali z jej wykresem, czyli ze zbiorem uporządkowanych par. Ale oczywiście nie każda relacja będzie funkcją. Podstawową własność wyróżniającą funkcje ze zbioru relacji jest prawostronna jednoznaczność.

Definicja. Funkcją f ze zbioru X do zbioru Y nazywamy relację w $X \times Y$, która jest *prawostronnie jednoznaczna*, tzn. $f \subset X \times Y$:

$$\forall x, y, z : (x f y \text{ oraz } x f z) \Rightarrow y = z. \quad (1.14)$$

Pamiętając, że zapis $x f y$ jest skrótem zapisu $(x, y) \in f$ możemy warunek prawostronnej jednoznaczności zapisać następująco

$$\forall x, y, z : ((x, y) \in f \text{ oraz } (x, z) \in f) \Rightarrow y = z.$$

W matematyce spotyka się często dla pojęcia funkcji inną nazwę – *odwzorowanie*. Możemy więc słowa: funkcja i odwzorowanie *używać zamiennie*.

Przykład

Rozważmy zbiory $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c\}$. Relacja $R \subset X \times Y$

$$R = \{(1, a), (3, a), (4, b)\},$$

jest funkcją, ale relacja S

$$S = \{(1, a), (2, c), (1, b)\},$$

nie jest funkcją.

Wprowadzimy teraz bardzo użyteczne oznaczenie: funkcję f ze zbioru X do zbioru Y oznaczamy następująco

$$f : X \rightarrow Y$$

Z warunku (1.14) wynika, że dla funkcji możemy zamiast zapisu $x f y$ używać notacji $y = f(x)$, który odczytujemy jako „ y jest wartością funkcji f dla argumentu x ”.

W przypadku funkcji zdefiniowanych w zbiorach liczbowych często posługujemy się „wzorem” do określenia funkcji. Na przykład $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. W szczególności mamy wtedy $f(3) = 7$, $f(-5) = -9$.

Zadania

- 1) Wypisać wszystkie możliwe relacje w zbiorze X , gdzie $X = \{1, 2\}$.
- 2) Dane są dwa zbiory skończone: $|X| = n$, $|Y| = m$. Ile jest wszystkich możliwych relacji w zbiorze $X \times Y$?
- 3) W zbiorze $X = \mathbb{R}$ zdefiniowana jest relacja w sposób następujący

$$x R y \Leftrightarrow x \cdot y = 0.$$

Podać, którą z własności (zwrotność, symetria, przechodniość, asymetria, spójność, prawostronna jednoznaczność) posiada ta relacja.

- 4) Sprawdzić, która z następujących relacji, określonych w zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$, jest relacją równoważności:

$$2 \mid x + y, \quad x + y \mid 3, \quad |x - y| \leq 5, \quad x \cdot y = 12.$$

- 5) Dane są zbiory $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$. Wypisać wszystkie relacje $f \subset X \times Y$, które są funkcjami.
- 6) Czy relacja w zbiorze liczb rzeczywistych $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ określona następująco

$$x R y \Leftrightarrow x = y^2$$

jest funkcją?

Funkcja odwrotna

Definicja. Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy

- a) iniekcją, gdy ma następującą własność

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- b) surjekcją, gdy ma następującą własność

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y.$$

- c) Funkcję nazywamy bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy jest iniekcją i surjekcją

Jeżeli funkcja jest iniekcją, to mówimy też, że jest *różnowartościowa*. Dla funkcji, która jest suriekcją używa się też określenia, że jest funkcją „na zbiór”.

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2} & \text{dla } x \neq 2, \\ 2 & \text{dla } x = 2. \end{cases}$$

- a) Czy f jest surjekcją?
- b) Czy f jest różnowartościowa (iniekcja)?
- c) Jeżeli f jest bijekcją, to wyznaczyć f^{-1} (funkcję odwrotną).

Rozwiązanie

Ad a)

Niech $y \in \mathbb{R}$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Czy istnieje wtedy $x \in D_f = \mathbb{R}$ taki, że $f(x) = y$?

Sprawdzamy: Gdy $y \neq 2$, to

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+2} &= y, \\ 2x+1 &= y(x+2), \\ 2x+1 &= yx+2y, \\ x(2-y) &= 2y-1, \\ x &= \frac{2y-1}{2-y}. \end{aligned}$$

Gdy $y = 2$, to weźmy $x = 2$, bo $f(x) = f(2) = 2 = y$ (z definicji funkcji f). Tak więc pokazaliśmy, że dla dowolnego y należącego do $\mathbb{R}$ istnieje x należący do dziedziny funkcji f taki, że $f(x) = y$. To oznacza, że funkcja f jest surjekcją.

Ad b)

Niech $f(x_1) = f(x_2)$. Musimy pokazać, że z tej równości wynika $x_1 = x_2$.

Jeżeli $x_1 \neq 2$ i $x_2 \neq 2$, to

$$\frac{2x_1+1}{x_1+2} = \frac{2x_2+1}{x_2+2}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
(2x_1 + 1)(x_2 + 2) &= (2x_2 + 1)(x_1 + 2), \\
2x_1x_2 + 4x_1 + x_2 + 2 &= 2x_2x_1 + 4x_2 + x_1 + 2, \\
4x_1 + x_2 &= 4x_2 + x_1, \\
4x_1 - x_1 &= 4x_2 - x_2, \\
3x_1 &= 3x_2, \\
x_1 &= x_2.
\end{aligned}$$

Jeżeli $x_1 = 2$ i $x_2 \neq 2$, to

$$2 = \frac{2x_2 + 1}{x_2 + 2}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
2(x_2 + 2) &= 2x_2 + 1, \\
2x_2 + 4 &= 2x_2 + 1, \\
4 &= 1,
\end{aligned}$$

czyli otrzymaliśmy sprzeczność, tak więc, gdy $x_1 = 2$, to wtedy też musi być $x_2 = 2$. Podobnie pokazujemy, że nie może być sytuacji $x_1 \neq 2$ i $x_2 = 2$. W takim razie podana funkcja jest różnowartościowa (iniekcja).

Ad c) Z punktów a) i b) wynika, że funkcja jest jednocześnie surjekcją i iniekcją (różnowartościowa), więc z definicji oznacz, że jest bijekcją. Z rachunku w punkcie Ad a) wynika również jaka jest postać funkcji odwrotnej:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{2y-1}{2-y} & \text{dla } y \neq 2, \\ 2 & \text{dla } y = 2. \end{cases}$$

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określona wzorem $f(x, y) = (xy, x + y)$. Sprawdzić, czy jest różnowartościowa, czy jest surjekcją. Jeżeli jest bijekcją, to podać wzór na funkcję odwrotną.

Rozwiązanie

Różnowartościowość: widać, że funkcja nie może być różnowartościowa, gdyż jest „symetryczna”, a mianowicie mamy $f(x, y) = f(y, x)$. Tak więc dla przykładu $f(1, 2) = (2, 3) = f(2, 1)$. Oznacza to, że różnym argumentom funkcji mogą odpowiadać te same wartości funkcji. To oznacza, że funkcja nie jest iniekcją.

Surjektywność: bierzemy dowolny element z przeciwdziedziny $(\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^2$ i pytamy się, czy istnieje element z dziedziny $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ taki, że $f(x, y) = (\xi, \zeta)$. Ze wzoru funkcji oznacza to, że muszą być spełnione równania

$$\begin{cases} xy = \xi, \\ x + y = \zeta. \end{cases}$$

Widać, że układ ten nie będzie miał rozwiązania, gdy np. $\zeta = 0$ i $\xi > 0$, bo wtedy mamy $x + y = 0$, czyli $y = -x$ co po wstawieniu do pierwszego równania układu da $-x^2 = \xi > 0$, czyli sprzeczność. Zatem funkcja nie jest surjekcją.

Niech $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{2}{x^3}$. Podać wzór na funkcję odwrotną.

Rozwiązanie

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{2}{x^3} = y \Rightarrow x^3 = \frac{2}{y} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2}{y}}.$$

Tak więc $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{2}{y}}$.

Definicja. Złożeniem (inaczej: superpozycją) dwóch funkcji $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$ nazywamy funkcję $g \circ f : X \rightarrow Z$ określoną następująco:

$$\forall x \in X : (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Przykłady

Niech $h(x) = \sin(\sqrt{x})$. Widać, że $h = g \circ f$, gdzie $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin x$.

Niech $h(x) = \ln(\ln x)$. W tym przypadku obie funkcje są takie same, $f(x) = g(x) = \ln x$. Należy tylko uważać na poprawne określenie dziedzin i przeciwdziedzin.

$$\begin{aligned} f : (1, \infty) &\rightarrow (0, \infty), & f(x) &= \ln x, \\ g : (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &= \ln x. \end{aligned}$$

Można udowodnić następujące podstawowe twierdzenie dotyczące funkcji odwrotnej.

Twierdzenie. Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g : Y \rightarrow X$ taka, że

$$g \circ f = id_X \text{ oraz } f \circ g = id_Y.$$

Funkcja taka jest tylko jedna i jest ona funkcją odwrotną, czyli $f^{-1} = g$.

Zauważmy, że z twierdzenia tego wynika, że funkcja odwrotna jest określona przez spełnianie następujących tożsamości

$$\begin{aligned}f^{-1}(f(x)) &= x \text{ dla } x \in X, \\f(f^{-1}(y)) &= y \text{ dla } y \in Y.\end{aligned}$$

Zadania

1) Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona następująco

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{dla } x \neq -2, x \neq 1 \\ 7 & \text{dla } x = -2, \\ 1 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

Pokazać, że f jest bijekcją oraz wyznaczyć f^{-1} .

2) Niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami określonymi wzorami $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ oraz

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x < 1, \\ x^2+x & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

Utworzyć złożenia $g \circ f$, $f \circ g$.

3) Określić największą możliwie dziedzinę $X \subset \mathbb{R}^2$ i przeciwdziedzinę $Y \subset \mathbb{R}^2$ dla funkcji danej wzorem $f(x, y) = (x+y, xy)$ tak, aby $f: X \rightarrow Y$ była bijekcją. Obliczyć dla takich zbiorów f^{-1} .