## Zbiory, relacje i funkcje

Zbiory będziemy zazwyczaj oznaczać dużymi literami  natomiast elementy zbiorów zazwyczaj małymi. Podstawą zależność między elementem zbioru a zbiorem, czyli relację przynależności do zbiory zapisujemy następująco



i czytamy: „ jest elementem zbioru ” (lub „ *należy do zbioru* ”). Zaprzeczeniem tego zdania jest „ nie należy do zbioru ” co zapisujemy jako



Zbiór którego elementami są  będziemy oznaczać w następujący sposób  W szczególności  oznacza zbiór, którego jedynym elementem jest  Zbiór, który nie ma żadnych elementów jest oznaczany symbolem  (można udowodnić, że jest tylko jeden taki zbiór). Jeżeli zbiór zawiera „dużo” elementów lub nieskończenie wiele, to definiując zbiór możemy użyć zapisu



co czytamy „*zbiór -ów należących do  spełniających własność* ”. Na przykład



Oznacza zbiór liczb naturalnych podzielnych przez dwa, czyli jest to zbiór liczb naturalnych parzystych.

Jeżeli pomiędzy zbiorami  oraz  zachodzi własność



Tzn. jeżeli każdy element zbioru  jest elementem zbioru  to mówimy, że  jest podzbiorem zbioru  ( zawiera się w ). Zapisujemy to następująco



Z tego określenia wynika, że dla dowolnego zbioru mamy:  Mamy także następujący fakt



**Definicja.** *Sumą* zbiorów  i  nazywamy zbiór  do którego należą wszystkie elementy zbioru  oraz wszystkie elementy zbioru  Zbiór taki oznaczamy przez  Formalnie mamy zatem



*Iloczynem* zbiorów  i  nazywamy zbiór  do którego należą wszystkie te elementy zbioru  które jednocześnie należą zbioru  Zbiór taki oznaczamy przez  Formalnie mamy zatem



Iloczyn zbiorów nazywamy także *przekrojem* lub *częścią wspólną* zbiorów.

Podstawowe prawa dodawania i mnożenia zbiorów

1. Przemienność: 
2. Łączność: 
3. Rozdzielność iloczynu względem sumy



1. Rozdzielność sumy względem iloczynu



1. 
2. 

**Definicja.** Różnicą zbiorów  nazywamy zbiór tych elementów zbioru  które nie należą do zbioru  Zbiór taki oznaczamy przez  Mamy zatem formalnie



Często mamy do czynienia z taką sytuacją, że wszystkie rozważane zbiory są podzbiorami jednego „dużego” zbioru . Na przykład w rachunku różniczkowym jednej zmiennej rzeczywistej wszystkie rozpatrywane zbiory są zawarte w zbiorze liczb rzeczywistych,  W takim przypadku różnicę  nazywamy dopełnieniem zbioru i oznaczamy  Z okreslenia tego mamy oczywiście



**Twierdzenie.** (prawa de Morgana). Dla dowolnych zbiorów  zachodzą równości



### Iloczyn kartezjański zbiorów

Mając dane zbiory  możemy łatwo tworzyć nowe zbiory wykorzystując poznane dotycz as operacje sumy, iloczynu czy różnicy. Okazuje się, że można zdefiniować jeszcze jedną operacje, która w istotny sposób rozszerza możliwości tworzenia nowych zbiorów. Tą operacją jest właśnie iloczyn kartezjański. Aby go wprowadzić musimy najpierw określić pojęcie pary uporządkowanej. Nieformalnie para uporządkowana elementów  jest opisana jako uporządkowany ciąg dwu-elementowy  Precyzyjna definicję podał Kazimierz Kuratowski:

Niech  będą danymi zbiorami. Jeżeli  to parą uporządkowaną nazywamy następujący zbiór dwuelementowy



Z definicji wynika podstawowy fakt dla par uporządkowanych



Teraz możemy podać już formalna definicję iloczynu kartezjańskiego.

**Definicja.** Iloczynem kartezjańskim zbiorów  i  nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych  takich że  i  Oznaczamy go przez  Tak więc formalny zapis jest następujący



**Przykład**

Niech  Wtedy iloczyn kartezjański



Niech  oznacza zbiór liczb rzeczywistych, który utożsamiamy ze zbiorem punktów na prostej. Wtedy  możemy utożsamić z płaszczyzną.

Dla zbiorów skończonych określamy moc zbioru jako liczbę jego elementów. Można to pojęcie uogólnić dla dowolnych zbiorów (nieskończonych). Moc zbioru  oznaczamy przez  (spotyka się też oznaczenia  Mamy więc



**Przykład**

1. Jeżeli  to 
2. Jeżeli  to 
3. Jeżeli  to 

Łatwo widać, że dla zbiorów skończonych zachodzi równość



Definicję iloczynu kartezjańskiego można uogólnić na dowolną liczbę zbiorów. W szczególności dla  zbiorów  iloczynem kartezjańskim nazywamy zbiór wszystkich -elementowych układów uporządkowanych  takich, że  dla  Mamy więc z definicji



## Zadania

1. Niech  Uzasadnić, że wtedy  gdzie  oznacza zbiór potęgowy.
2. Obliczyć moce podanych zbiorów



1. Uzasadnić następujące tożsamości dla zbiorów
   1. 
   2. 
   3. 
   4. 
   5. 
   6. 
2. Uzasadnić, że



## Relacje

Przypomnijmy, że iloczyn (produkt) kartezjański  zbiorów  i  jest to zbiór *wszystkich* uporządkowanych par



Analogicznie określa się produkt  zbiorów  który składa się z uporządkowanych  Możemy teraz podać teoriomnogościową definicję relacji (skoncentrujemy się tylko na przypadku relacji dwuargumentowych).

Definicja. Relacją (dwuargumentową)  nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego  a więc



Gdy mamy zdefiniowaną relację  i jeżeli para  to mówimy, że  jest w relacji z 

Przykłady

1. Relacja mniejszości  w zbiorze liczb rzeczywistych  Na przykład mamy  ale w praktyce piszemy: 
2. Relacja podzielności  w zbiorze liczb całkowitych  Mamy przykładowo   Oczywiście piszemy raczej tak:  czy 
3. Relacja prostopadłości, relacja równoległości, relacja zawierania się zbiorów.
4. Relacja pusta w zbiorze  tzn.  (czyli żadne dwa elementy nie są w relacji); relacja totalna  (czyli każde dwa elementy  są ze sobą w relacji.

Gdy mamy dane dwie relacje  to superpozycją (złożeniem)  relacji  nazywamy taki podzbiór  że



Możemy to wyrazić też tak



Gdy  można utworzyć relację  którą oznaczać też będziemy przez 

### Różne typy relacji

Relacja  jest

1. zwrotna (refleksywna), gdy 
2. symetryczna, gdy 
3. przechodnia, gdy 
4. spójna, gdy 
5. asymetryczna, gdy 

Przykłady

1. Relacje zwrotne: równoległość prostych, zawieranie się zbiorów, prostopadłość prostych, podzielność.
2. Relacje symetryczne: równoległość prostych, prostopadłość prostych, relacja pokrewieństwa.
3. Relacje przechodnie: równoległość prostych, zawieranie się zbiorów, relacja podzielności, relacja mniejszości w  relacja większości w 
4. Relacje spójne: słaba mniejszość 
5. Relacje asymetryczne: relacja mniejszości  relacja bycia potomkiem.

Relacja równoważności

Jednym z ważniejszych typów relacji w matematyce są tzw. relacje równoważności. Można powiedzieć, że jest to pewnego rodzaju uogólnienie pojecie równości.

**Definicja.** Relację  w zbiorze  nazywamy *relacją równoważności*, jeśli jest ona zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykłady

Następujące relacje są relacjami równoważności:

1. równość w dowolnym zbiorze,
2. podobieństwo figur geometrycznych,
3. relacja podzielności modulo  (tzw. kongruencja),
4. relacja równoległości prostych.

## Funkcje

Jak już wiemy ścisłe pojęcie relacji jest sformalizowaniem na gruncie teorii mnogości intuicyjnego pojęcia związku pomiędzy obiektami. Pojęcie funkcji będzie zaś odpowiednikiem intuicyjnego pojęcie przyporządkowania. W taki bowiem intuicyjny sposób „określa” się funkcję w szkole („… jest to *przyporządkowanie*, które…”). Podobnie jak w przypadku relacji, funkcję będziemy utożsamiali z jej wykresem, czyli ze zbiorem uporządkowanych par. Ale oczywiście nie każda relacje będzie funkcja. Podstawową własność wyróżniającą funkcje ze zbioru relacji jest prawostronna jednoznaczność.

**Definicja.** *Funkcją*  ze zbioru  do zbioru  nazywamy relację w  która jest *prawostronnie jednoznaczna*, tzn. 



Pamiętając, że zapis  jest skrótem zapisu  możemy warunek prawostronnej jednoznaczności zapisać następująco



W matematyce spotyka się często dla pojęcia funkcji inną nazwę – *odwzorowanie*. Możemy więc słowa: funkcja i odwzorowanie *używać zamiennie*.

Przykład

Rozważmy zbiory  Relacja 



jest funkcją, ale relacja 



nie jest funkcją.

Wprowadzimy teraz bardzo użyteczne oznaczenie: funkcję  ze zbioru  do zbioru oznaczamy następująco



Z warunku wynika, że dla funkcji możemy zamiast zapisu  używać notacji  który odczytujemy jako „* jest wartością funkcji  dla argumentu *”.

W przypadku funkcji zdefiniowanych w zbiorach liczbowych często posługujemy się „wzorem” do określenia funkcji. Na przykład  W szczególności mamy wtedy  

## Zadania

1. Wypisać wszystkie możliwe relacje w zbiorze  gdzie 
2. Dane są dwa zbiory skończone:  Ile jest wszystkich możliwych relacji w zbiorze 
3. W zbiorze  zdefiniowana jest relacja w sposób następujący



Podać, którą z własności (zwrotność, symetria, przechodniość, asymetria, spójność, prawostronna jednoznaczność) posiada ta relacja.

1. Sprawdzić, która z następujących relacji, określonych w zborze liczb całkowitych jest relacją równoważności:



1. Dane są zbiory  Wypisać wszystkie relacje  które są funkcjami.
2. Czy relacja w zbiorze liczb rzeczywistych określona następująco



jest funkcją?

## Funkcja odwrotna

Definicja. Funkcję  nazywamy

1. injekcją, gdy ma następująca własność



1. surjekcją, gdy ma następującą własność



1. Funkcję nazywamy bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy jest iniekcją i surjekcją

Jeżeli funkcja jest injekcją, to mówimy też, że jest *różnowartościowa*. Dla funkcji, która jest suriekcją używa się też określenia, że jest funkcją „*na zbiór*”.

Niech  będzie dana wzorem



1. Czy  jest surjekcją?
2. Czy  jest różnowartościowa (iniekcja)?
3. Jeżeli  jest bijekcją, to wyznaczyć  (funkcję odwrotną).

Rozwiązanie

Ad a)

Niech  będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Czy istnieje wtedy  taki, że  Sprawdzamy: Gdy to



Gdy  to weźmy  bo  (z definicji funkcji ). Tak wiec pokazaliśmy, że dla dowolnego  należącego do  istnieje należący do dziedziny funkcji  taki, że  To oznacza, że funkcja  jest surjekcją.

Ad b)

Niech Musimy pokazać, że z tej równości wynika 

Jeżeli  i  to



Wtedy



Jeżeli  i  to



Wtedy



czyli otrzymaliśmy sprzeczność, tak więc, gdy  to wtedy też musi być  Podobnie pokazujemy, że nie może być sytuacji  i  W takim razie podana funkcja jest różnowartościowa (iniekcja).

Ad c) Z punktów a) i b) wynika, że funkcja jest jednocześnie surjekcją i iniekcją (różnowartosciowa0, więc z definicji oznacz, że jest bijekcją. Z rachunku w punkcje Ad a) wynika również jaka jest postać funkcji odwrotnej:



Dana jest funkcja  określona wzorem  Sprawdzić, czy jest różnowartościowa, czy jest surjekcją. Jeżeli jest bijekcją, to podać wzór na funkcją odwrotną.

Rozwiązanie

Różnowartościowość: widać, ze funkcja nie może być różnowartościowa, gdyż jest „symetryczna”, a mianowicie mamy  Tak więc dla przykładu  Oznacza to, że różnym argumentom funkcji mogą odpowiadać te same wartości funkcji. To oznacza, że funkcja nie jest iniekcją.

Surjektywność: bierzemy dowolny element z przeciwdziedziny  i pytamy się, czy istnieje element z dziedziny  taki, że  Ze wzoru funkcji oznacza to, że muszą być spełnione równania



Widać, że układ ten nie będzie miał rozwiązania, gdy np.  i  bo wtedy mamy  czyli  co po wstawieniu do pierwszego równania układu da  czyli sprzeczność. Zatem funkcja nie jest surjekcją.

Niech Podać wzór na funkcją odwrotną.

Rozwiązanie



Tak więc 

Definicja. Złożeniem (inaczej: superpozycją) dwóch funkcji  i  nazywamy funkcję  określoną następująco:



Przykłady

Niech  Widać, że  gdzie 

Niech  W tym przypadku obie funkcje są takie same,  Należy tylko uważać na poprawne określenie dziedzin i przeciwdziedzin.



Można udowodnić następujące podstawowe twierdzenie dotyczące funkcji odwrotnej.

Twierdzenie. Funkcja  jest bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja  taka, że



Funkcja taka jest tylko jedna i jest ona funkcja odwrotną, czyli 

Zauważmy, że z twierdzenia tego wynika, że funkcja odwrotna jest określona przez spełnianie następujących tożsamości



## Zadania

1) Niech  będzie określona następująco



Pokazać, że  jest bijekcją oraz wyznaczyć 

2) Niech  będą funkcjami określonymi wzorami  oraz



Utworzyć złożenia 

3) Określić największą możliwie dziedzinę  i przeciwdziedzinę  dla funkcji danej wzorem tak, aby  była bijekcją. Obliczyć dla takich zbiorów 